

Documento de Trabajo N° 72: Carteras de Inversión Referenciales para los Fondos de Cesantía

Julio 2023

Documento elaborado por

Paulina Granados Zambrano

Jefa del Departamento de Investigación, Superintendencia de Pensiones

Cristian Hernández Fuentes

Analista de Investigación, Superintendencia de Pensiones

Pablo Madrid Cocori

Analista de Investigación, Magister en Economía Aplicada Universidad Católica de Chile

Eugenio Salvo Cifuentes

Analista senior División de Estudios, Superintendencia de Pensiones

(*) Se agradecen los comentarios de Divisiones Desarrollo Normativo y Financiera de la Superintendencia de Pensiones. Especial agradecimiento a las/los profesoras/es Bernardita Vial, Juan Urquiza y José Miguel Cruz, panel de comisión de tesis de magister de Pablo Madrid, por sus comentarios y sugerencias.

Resumen

Este documento tiene como objetivo principal perfeccionar el desempeño riesgo-retorno de los Fondos de Cesantía a través de la optimización de sus ponderadores, junto con analizar la pertinencia de incluir nuevos índices financieros y, en el caso del fondo de las Cuentas Individuales, agregar renta variable. Para esta labor, se optimizan las carteras de referencia según la teoría de portafolio de Markowitz (1952) y Black&Litterman (1992). Adicionalmente, se consideran dos métodos de estimación de la matriz de varianzas y covarianzas: la primera a través del método Flex-Garch, el cual fue el método que se utilizó en el año 2009, en la construcción de las carteras de referencia por la Superintendencia de Pensiones; y la segunda, por método de encogimiento (Shrinkage).

Los resultados indican que una mayor diversificación en la cartera de referencia del Fondo de Cesantía Solidario (FCS) y la inclusión de renta variable en la cartera de referencia del Fondo de Cesantía (conformado por las cuentas individuales por cesantía, CIC), pueden lograr un mejor desempeño de riesgo-retorno.

Índice

Tabla de contenido

RESUMEN	2
1. INTRODUCCIÓN	4
2. DESCRIPCIÓN DEL SEGURO DE CESANTÍA	5
2.1. FINANCIAMIENTO	5
2.2. EVOLUCIÓN DE LOS FONDOS	5
3. INVERSIONES DE LOS FONDOS DE CESANTÍA	8
3.1. LAS CARTERAS DE REFERENCIA DE LOS FONDOS DE CESANTÍA	8
3.2. FUNCIONAMIENTO DE LAS CARTERAS DE REFERENCIA	9
4. EL MODELO	13
4.1 ÍNDICES A UTILIZAR	13
4.2 APLICACIÓN DEL MODELO MEDIA VARIANZA	15
4.2.1 LA MATRIZ DE VARIANZA Y COVARIANZAS	17
4.2.2 RETORNOS ESPERADOS	19
5. FRONTERAS EFICIENTES	20
5.1 FRONTERA EFICIENTE DE LA CIC	20
5.2 FRONTERA EFICIENTE DEL FCS	25
6. NUEVAS CARTERAS DE REFERENCIA	28
6.1 SIMULACIÓN EN MODELO DE PROYECCIÓN SEGURO DE CESANTÍA.	30
7. ESQUEMA DE PREMIOS Y CASTIGOS	31
CONCLUSIONES	34
BIBLIOGRAFÍA	35
APÉNDICE TÉCNICO FINANCIERO	36

1. Introducción

El Seguro de Cesantía es uno de los principales instrumentos de protección social de un país. En Chile, el actual diseño de Seguro de Cesantía existe desde el año 2002, el cual combina el ahorro individual con un seguro colectivo. Luego de siete años de funcionamiento, la Ley N°20.328 modificó el Seguro de Cesantía en una serie de aspectos, al introducir carteras de referencia exógenas (*benchmark*) para cada fondo de cesantía, las cuales servirán para evaluar el desempeño de las inversiones, gestionadas por la sociedad administradora de fondos de cesantía. Las clases de activo que conforman dichas carteras están definidas en el Régimen de Inversión del Seguro de Cesantía donde, además, se establecen límites de inversión por clases de activo, tipo de instrumento y emisor.

Las actuales carteras de referencia se diferencian entre sí respecto de la liquidez necesaria ligada a la frecuencia del retiro de beneficios que enfrenta cada uno de sus respectivos fondos. Es así como el *benchmark* del Fondo de Cesantía (CIC) tiene un perfil de riesgo más conservador. En cambio, el *benchmark* del Fondo de Cesantía Solidario (FCS) tiene un perfil más arriesgado.

En la última evaluación del funcionamiento de las carteras de referencia¹, elaborada por la Superintendencia de Pensiones, se concluyó que las carteras de referencia vigentes cumplen con los objetivos señalados en el inciso tercero del artículo 58E de la Ley N°19.728. Además, se muestra que los retornos observados tanto para el Fondo CIC como el FCS, nunca han superado ni estado bajo la banda² de premios y castigos, aunque en general han tenido desempeño levemente superior que aquel obtenido por las carteras de referencia. Lo anterior permite concluir que la Administradora de Fondos de Cesantía replica las carteras de referencia de manera parcial, desviándose de las carteras de referencia y logrando así en el largo plazo un desempeño riesgo-retorno levemente superior.

Debido a que la Administradora ha podido replicar los índices que componen las carteras de referencia y también en el largo plazo obtener mejor desempeño riesgo-retorno, es que se propone evaluar nuevas diversificaciones de las carteras de referencia, en directo beneficio de los afiliados que enfrenten cesantía.

El documento está organizado de la siguiente manera. La sección 2 realiza una breve descripción del Seguro de Cesantía. La sección 3 presenta los componentes de cada cartera de referencia junto con una evaluación del actual desempeño riesgo-retorno. La sección 4 describe el modelo utilizado para actualizar las carteras de referencia. La sección 5 muestra las fronteras eficientes de cada cartera de referencia. Finalmente, la sección 6 presenta las conclusiones del estudio.

¹ Granados, P. Hernández, C. y Salvo E. (2020). Documento de trabajo N°64: Funcionamiento de carteras de referencia de los fondos de cesantía. Superintendencia de Pensiones.

² Cada mes que la rentabilidad real de los fondos de cesantía de los últimos seis meses supere la banda de premios y castigos, la comisión cobrada será la comisión base incrementada en un 10%, en caso sea inferior a la banda, la comisión cobrada será la comisión base reducida en un 10%.

2. Descripción del Seguro de Cesantía

El Seguro de Cesantía es un instrumento que brinda protección a los ingresos de los trabajadores dependientes regidos por el Código del Trabajo, frente a la pérdida del empleo, ya sea por causas voluntarias o involuntarias, otorgando prestaciones monetarias, así como otros beneficios (seguro lagunas previsionales y servicios de intermediación laboral) que apoyan la búsqueda de un nuevo empleo, con el propósito de acelerar la reinserción laboral.

El diseño del Seguro de Cesantía se basa en dos componentes, uno de ahorro individual que se abona en una cuenta personal de propiedad de cada afiliado, que conforma el Fondo con las Cuentas Individuales por Cesantía (CIC) y, por otro lado, el Fondo de Cesantía Solidario (FCS), el cual otorga prestaciones por cesantía una vez agotados los recursos de la Cuenta Individual por Cesantía sujeto a elegibilidad.

2.1. Financiamiento

El Seguro de Cesantía se financia con cotizaciones que corresponden al 3,0% de la remuneración imponible del trabajador. El esquema de financiamiento depende del tipo de contrato:

Trabajadores con contrato indefinido aportan 0,6% de su remuneración imponible a la CIC, mientras sus empleadores contribuyen con el equivalente al 1,6% a la CIC y 0,8% de la renta imponible del trabajador al FCS;

En el caso de trabajadores con contrato a plazo fijo, o por obra, trabajo o servicio determinado³, y trabajadores de casa particular, sólo contribuyen sus empleadores: 2,8% de la renta imponible destinada a la CIC y 0,2% destinado al FCS, para trabajadores a plazo fijo, y 2,2% de la renta imponible destinada a la CIC y 0,8% destinado al FCS, para trabajadores de casa particular.

Además de la contribución de los empleadores, el Fondo de Cesantía Solidario recibe un aporte anual del Estado equivalente a 225.792 Unidades Tributarias Mensuales (UTM).

2.2. Evolución de los Fondos

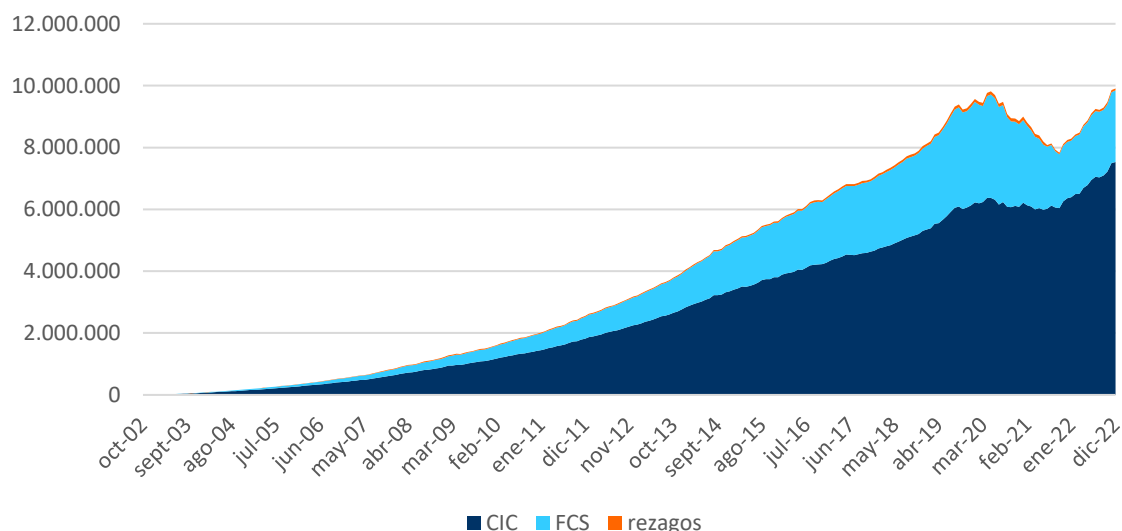
Desde su puesta en marcha, el patrimonio de los fondos de cesantía ha ido creciendo de manera sostenida hasta el año 2020, momento en que experimentó una caída debido al uso extraordinario de recursos para enfrentar los efectos económicos causados por la pandemia Covid-19. Lo anterior, no solo se debe al aumento de retiro de beneficios por desempleo, sino que también por las Leyes de Protección del Empleo (LPE). Las principales medidas que incluyeron estas leyes fueron suspender o reducir temporalmente la jornada laboral⁴, manteniendo los contratos de trabajo, pero liberando al empleador total o parcialmente del pago de remuneraciones, las que fueron

³ En lo que sigue a este trabajo, el concepto contrato a plazo fijo será utilizado para referirse a todos los contratos a plazo fijo, o por obra, trabajo o servicio determinado.

⁴ Ley N°21.227 buscaba proteger la fuente laboral de los trabajadores, permitiéndoles acceder a las prestaciones y complementos del Seguro de Cesantía.

reemplazadas por prestaciones calculadas como porcentajes de las remuneraciones con cargo a los Fondos de Cesantía, entre abril 2020 y octubre 2021. Además, se flexibilizaron requisitos de acceso al Seguro de Cesantía (SC) y se aumentó el monto de beneficios para quienes enfrentaron desempleo entre septiembre 2020 y octubre 2021. Finalmente, se aumentó la cobertura Seguro de Cesantía (SC) de manera permanente incluyendo a trabajadores de casa particular.⁵ En el gráfico 1 es posible observar la evolución de ambos fondos de cesantía.

Gráfico 1: Evolución Patrimonio CIC y FCS (MM\$ de cada mes)



Fuente: Superintendencia de Pensiones

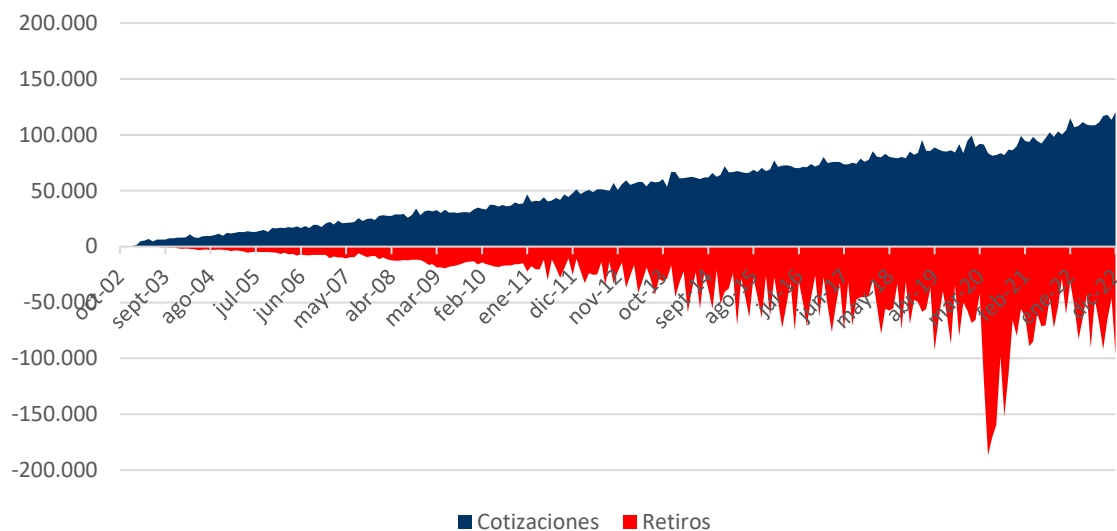
Al 30 de diciembre de 2022⁶, la CIC posee un patrimonio de US\$8.761 millones y el FCS posee un patrimonio de US\$2.692 millones. La evolución creciente del FCS hasta el año 2020 se explica, en gran medida, por la diferencia permanente entre flujos de ingresos y egresos antes de la Pandemia Covid19.

En el gráfico 2 se observa cómo los fondos tuvieron una gran cantidad de retiros a partir de la Pandemia Covid19 y la entrada en vigor de las Leyes de Protección al Empleo. Se observa que las cotizaciones presentan un crecimiento sostenido en el tiempo, mientras que los egresos por concepto de retiro de beneficios también muestran trayectoria creciente. Sin embargo, registran un aumento a partir del año 2015 y posteriormente un cambio de nivel durante el 2020 y 2021. El primer cambio está relacionado con la Reforma del Seguro de Cesantía del año 2015 (ley N°20.829), la cual aumentó las tasas de reemplazo, los montos mínimos y máximos de los giros, el número de giros que pueden recibir los trabajadores en un plazo de 5 años y el número máximo de giros para trabajadores a plazo fijo. Por otro lado, el máximo de retiros registrados en 2020 se debe a las consecuencias en el mercado laboral debido a la Pandemia Covid19 y a las leyes de protección al empleo.

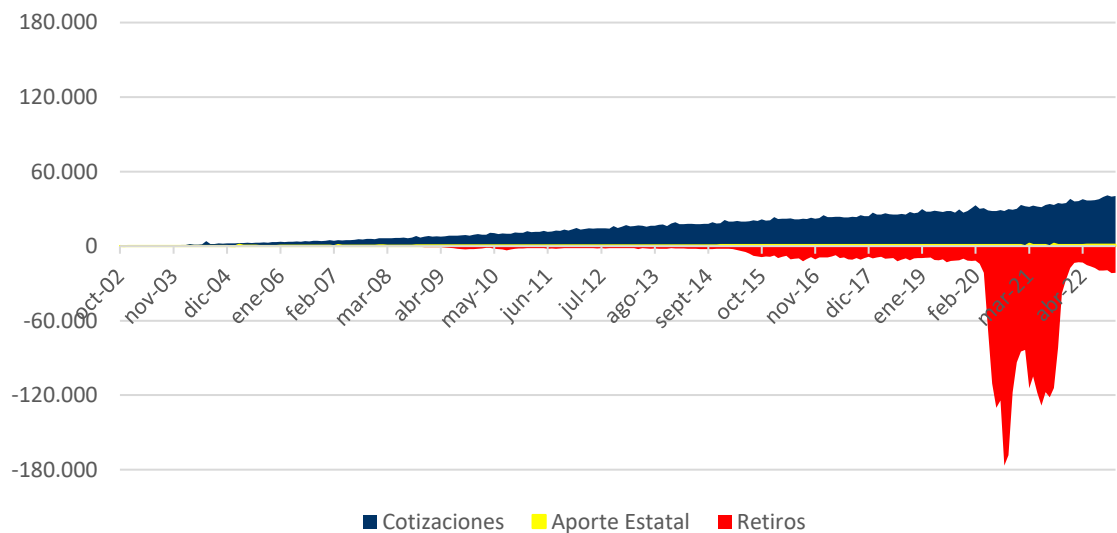
⁵ Leyes N° 21.263 y 21.269.

⁶ Dólar observado 859,51.

Gráfico 2: Cotizaciones y Retiros de los Fondos de Cesantía
(MM\$ de cada mes)
(a) CIC



(b) FCS



Fuente: Superintendencia de Pensiones

3. INVERSIONES DE LOS FONDOS DE CESANTÍA

Las inversiones de los Fondos de Cesantía están reguladas por la Ley N°19.728, por el Decreto Ley N°3.500 de 1980, por el Régimen de Inversión de los Fondos de Cesantía y por normativa complementaria emitida por la Superintendencia de Pensiones. La ley que perfeccionó el Seguro de Cesantía introdujo, a partir de noviembre de 2009, un conjunto de modificaciones que permiten incorporar una cartera de inversión más eficiente en términos de lograr una mejor combinación riesgo y rentabilidad esperada.

La ley N° 19.728 y supletoriamente el Decreto Ley N°3.500, de 1980, establecen los instrumentos elegibles, rangos de los límites estructurales para la inversión de los Fondos de Cesantía y parte de los límites respecto de emisores.

Por su parte, el Régimen de Inversión de los Fondos de Cesantía regula materias específicas de las inversiones que requieren más flexibilidad y detalle; establece la cartera referencial para la determinación del premio o castigo de las comisiones cobradas por la Sociedad Administradora y define límites de inversión cuyo objetivo es propender a una adecuada diversificación de los Fondos. La Superintendencia de Pensiones es la responsable de la elaboración y actualización del mencionado Régimen, considerando las recomendaciones que el Consejo Técnico de Inversiones⁷ pueda efectuar sobre la materia. La Superintendencia no podrá incluir en el Régimen de Inversión contenidos rechazados por el Consejo en su informe y deberá señalar, en la resolución que establece el Régimen de Inversión, previa autorización del Ministerio de Hacienda, las razones por las cuales no haya considerado sus recomendaciones.

3.1. Las Carteras de Referencia de los Fondos de Cesantía

La ley establece que los recursos de las Cuentas Individuales y del Fondo de Cesantía Solidario deben ser invertidos con el único objeto de asegurar una adecuada rentabilidad y seguridad.

El Régimen de Inversión establece las carteras de inversión referenciales para los Fondos de Cesantía, teniendo en consideración los siguientes aspectos:

- a) Que las carteras referenciales reflejen criterios de inversión concordantes con los objetivos de protección del Seguro.
- b) Que dichas carteras sean susceptibles de ser replicadas.
- c) Que dichas carteras contemplen criterios de estabilidad de las inversiones.
- d) Que la información que sustenta las carteras de referencia sea de acceso público y no pueda ser alterada ni manipulada.
- e) Que contemplen criterios de diversificación en su conformación, respecto de, a lo menos, emisores, naturaleza de instrumentos y mercados.

⁷ <https://www.spensiones.cl/portal/institucional/594/w3-propertyvalue-6440.html>

Se distinguen dos tipos de carteras referenciales, una aplicable a las Cuentas Individuales de Cesantía (CIC) y otra para el Fondo de Cesantía Solidario (FCS). La diferencia entre ambas está dada por las clases de activos y las proporciones de estas en cada una de estas carteras. La composición de ambas carteras se presenta a continuación:

Cuadro 1: Composición de las carteras de referencia según clase de activos⁸.

Clase de Activos	Cartera de Referencia CIC	Cartera de Referencia FCS
Instrumentos de intermediación financiera nacional	45%	10%
Instrumentos de renta fija nacional	45%	75%
Instrumentos de deuda extranjera	10%	5%
Instrumentos de renta variable nacional	-	5%
Instrumentos de renta variable extranjera	-	5%

Como se puede observar, la cartera de referencia CIC posee un perfil de portafolio relativamente conservador, mientras que la del FCS uno más arriesgado. Esto se debe a que la CIC requiere disponibilidad inmediata para los afiliados, esto implica que un gran porcentaje de sus inversiones sean en activos más líquidos y de bajo riesgo, en cambio el FCS, al ser un fondo colectivo demanda menos liquidez, por lo cual puede invertir en activos más riesgosos y con mayor plazo.

3.2. Funcionamiento de las Carteras de referencia

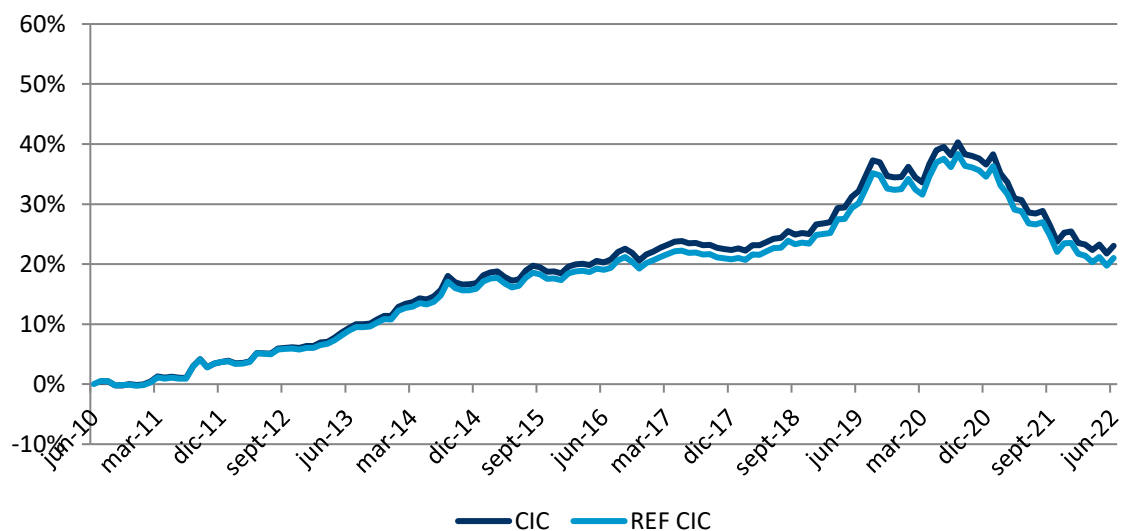
En este apartado se analiza el desempeño de riesgo retorno que han tenido las actuales carteras de referencia, para esto se considera el periodo de junio 2010 a junio 2022.

En primer lugar, se analizan las rentabilidades acumuladas de ambos fondos con sus respectivas carteras de referencia.

⁸ En documento de trabajo N°34 de la Superintendencia de Pensiones se presenta la metodología utilizada en la elección de la composición de cada cartera de referencia.

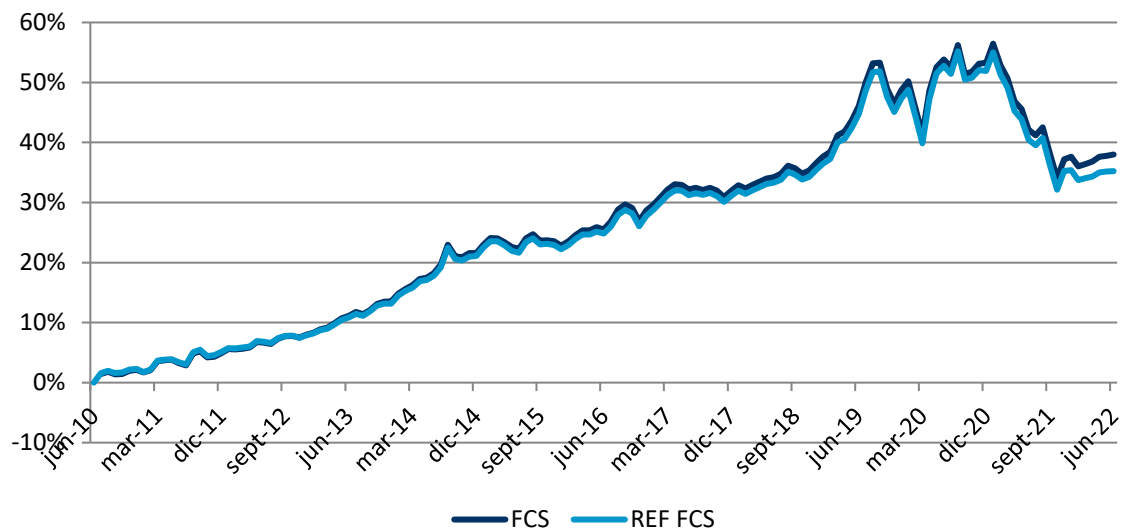
Fuente: <http://www.spensiones.cl/portal/institucional/594/w3-article-7997.html>

Gráfico 3a: Retornos acumulados: CIC y Referencia CIC



Fuente: Superintendencia de Pensiones a partir de Base de Datos del Seguro de Cesantía

Gráfico 3b: Retornos acumulados: FCS y Referencia FCS



Fuente: Superintendencia de Pensiones a partir de Base de Datos del Seguro de Cesantía

Cuadro 2: Retornos reales acumulados de los Fondos y de sus carteras de Referencia

Retorno real acumulado	Jun10 a dic10	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	Ene22 a Jun22	Jun10 a Jun22
CIC	-0,2%	3,9%	2,5%	4,7%	4,9%	1,4%	2,7%	0,6%	3,5%	-0,1%	-1,1%	1,4%	-0,2%	23,0%
Ref CIC	-0,3%	4,0%	2,3%	4,5%	4,6%	1,3%	2,4%	0,5%	3,4%	-0,1%	-1,1%	1,2%	-0,1%	21,0%
Exceso CIC	0,1%	-0,1%	0,2%	0,3%	0,3%	0,1%	0,3%	0,1%	0,1%	-0,1%	0,0%	0,2%	-0,1%	2,0%
FCS	2,1%	2,7%	3,0%	5,1%	7,1%	1,0%	4,7%	2,6%	3,5%	-0,2%	0,9%	2,6%	0,2%	38,0%
Ref FCS	2,3%	2,8%	2,6%	4,9%	7,0%	0,9%	4,5%	2,6%	3,3%	-0,2%	0,7%	2,5%	0,2%	35,2%
Exceso FCS	-0,2%	-0,1%	0,3%	0,2%	0,1%	0,1%	0,2%	-0,1%	0,2%	0,0%	0,2%	0,2%	0,0%	2,7%

Fuente: Superintendencia de Pensiones a partir de Base de Datos del Seguro de Cesantía

Los gráficos 3a y 3b y el cuadro 2 muestran que, desde junio del 2010 hasta junio del 2022, el fondo de cesantía individual ha tenido 2 pp. más de retorno que su cartera de referencia, mientras que el fondo de cesantía solidario ha tenido 2,7 pp. más de retorno que su cartera de referencia. En particular, la CIC obtuvo retornos reales menores que su *benchmark* los años 2011, 2019 y primer semestre 2022. En cambio, el FCS obtuvo retornos reales menores que su *benchmark* para el periodo junio 2010-diciembre 2011 y durante el año 2017.

A continuación, se realiza un análisis de algunos indicadores de desempeño ajustados por riesgo.

Cuadro 3: Indicadores⁹ mensuales de Fondos de Cesantía y carteras de referenciales

jun 2010 - jun 2022	CIC	REF CIC	FCS	REF FCS
Retorno real promedio	0,15%	0,14%	0,23%	0,22%
Volatilidad	0,83%	0,83%	1,19%	1,21%
Sharpe Ratio	0,09	0,08	0,10	0,09
Exceso de curtosis	0,87	0,89	2,19	3,08
VaR Paramétrico	-1,22%	-1,23%	-1,74%	-1,77%
VaR Simulación Histórica	-1,48%	-1,47%	-2,48%	-2,55%

Notas: Los índices Sharpe de CIC y REF CIC se calculan utilizando el retorno promedio de los bonos en UF del gobierno y Banco Central de Chile a 1 años, en cambio para FCS y REF FCS se utiliza a 5 años.

Al analizar el desempeño con retornos mensuales promedio (cuadro 3) se aprecia que el fondo CIC presenta un mejor retorno promedio que su referencia, sin embargo, con una volatilidad muy similar. A pesar de esto, el índice Sharpe es mayor en la CIC que en su *benchmark*, reflejando que la CIC logra un mayor retorno por unidad de riesgo asumido. Por otro lado, el exceso de curtosis es menor en la CIC que en su *benchmark* lo que significa que su distribución de retornos se asimila más a una distribución normal. En cuanto al *Value at Risk* (VaR) de la cartera referencial, se observa que tanto el VaR paramétrico como el VaR de simulación histórica son muy similares.

⁹ Definiciones y fórmulas de indicadores en Apéndice Técnico Financiero

El FCS presenta un retorno mensual promedio mayor con volatilidad menor que su referencia. Por su parte, el índice Sharpe es mayor en el FCS, logrando un mayor retorno por unidad de riesgo asumido que su *benchmark*. En cuanto, al exceso de curtosis, este es menor en el FCS que en su *benchmark* lo que significa que su distribución de retornos es más cercana a una distribución normal. Finalmente, en cuanto al VaR de la cartera referencial, vemos que tanto el paramétrico como el de simulación histórica tienen un mayor valor absoluto que el FCS, lo que indica que el *benchmark* podría caer más que el FCS en un mes.

Cuadro 4: Indicadores de rentabilidad ajustada al riesgo¹⁰

junio 2010 - junio 2022	CIC	FCS
Riesgo Absoluto	0,830%	1,194%
Riesgo Relativo (TE)	0,045%	0,056%
Razón de Información	0,250	0,246
Alpha de Jensen (Bonos UF 1 año)	0,0001	0,0002
Beta (Bonos UF 1 año)	0,9976	0,9881
Alpha de Jensen (Bonos UF 5 años)	0,0001	0,0002
Beta (Bonos UF 5 años)	0,9978	0,9879

Fuente: Superintendencia de Pensiones a partir de Base de Datos del Seguro de Cesantía

En el cuadro 4 se observa que el riesgo absoluto de la CIC es menor al del FCS. Además, el riesgo relativo es levemente mayor en el FCS, por lo que el riesgo de que este fondo se distancie de su *benchmark* es un poco mayor al riesgo de que la CIC se distancie de su *benchmark*.

La Razón de Información indica que el valor añadido por la Administradora por unidad de riesgo es mayor en la CIC y los Alpha de Jensen levemente mayores a cero (grados de significancia mayores al 5%) señalan que la Administradora gestionaría con una calidad e interpretación levemente superior la información que sus carteras de referencias. Finalmente, ambas betas son cercanos a 1, lo que significa que los fondos son estadísticamente igual de volátiles que sus respectivas carteras de referencia.

Al igual que el documento de trabajo N°64¹¹ elaborado por la Superintendencia de Pensiones, se concluye que la AFC replica las carteras de referencia de manera parcial y no exacta, por lo que su mejor desempeño en rentabilidades y riesgo se debe a que la AFC invierte en instrumentos y proporciones levemente distintas a lo señalado en las carteras de referencia.

¹⁰ Definiciones y fórmulas de indicadores en Apéndice Técnico Financiero

¹¹ Granados, P. Hernández, C. y Salvo E. (2020). Documento de trabajo N°64: Funcionamiento de carteras de referencia de los fondos de cesantía. Superintendencia de Pensiones.

4. EL MODELO

A continuación, se evaluarán ponderaciones óptimas de las carteras referenciales o *benchmarks* exógenos para la CIC y el FCS, por lo tanto, como guía se utilizará la metodología de las actuales carteras, que se encuentra en el Documento de Trabajo N°34: “Carteras Referenciales y Esquema de Premios y Castigos para los Fondos de Cesantía” (Berstein et al, 2009).

La construcción de carteras eficientes sigue la teoría de portafolio de Markowitz (1952), la cual busca una proporción óptima de activos de una cartera, mediante la minimización del riesgo sujeto a un cierto nivel de retorno. El problema se define de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \min_{\{w\}} \frac{1}{2} w' \Sigma w \\ & \text{Sujeto a:} \\ (2) \quad & w' m = r_0 \\ (3) \quad & w \geq 0 \text{ y } w' l = 1 \end{aligned}$$

Donde Σ es la matriz de varianzas y covarianzas de los activos riesgosos considerados, w es el vector de ponderaciones de los activos en la cartera, m es el vector de retorno esperado para los activos, r_0 representa el retorno exigido y l es un vector donde sus elementos son 1 (completitud de la cartera). La condición (3) restringe a que no exista “posición corta”¹² y que las ponderaciones de cada activo en la cartera óptima sumen 100%. Además, es posible agregar restricciones adicionales como los límites señalados en el Régimen de Inversiones del Seguro de Cesantía (por ejemplo, límite máximo de renta extranjera: 30%).

4.1 Índices a utilizar

Las estimaciones del modelo incorporan los índices de las carteras de referencia vigentes al estudio de Funcionamiento de Carteras de Referencia del 2020¹³, dado que se demostró que cumplen correctamente con las consideraciones del artículo 58E de la ley N°19.728. Sin embargo, se analizó incorporar dos tipos de activos, los cuales son activos alternativos y renta fija extranjera de alto rendimiento (high yield).

Con respecto a los activos alternativos, estos son transados principalmente en mercados privados, por lo cual su opacidad¹⁴ en precios es un problema para considerar un índice que pueda ser replicado correctamente por la Administradora de Fondos de Cesantía (AFC). Además, se ha

¹² Una posición corta, significa vender un activo sin haberlo comprado antes, con la idea de que el precio bajará y que se podrá comprar en un futuro a un nivel más bajo.

¹³ Granados, P. Hernández, C. y Salvo E. (2020). Documento de trabajo N°64: Funcionamiento de carteras de referencia de los fondos de cesantía. Superintendencia de Pensiones.

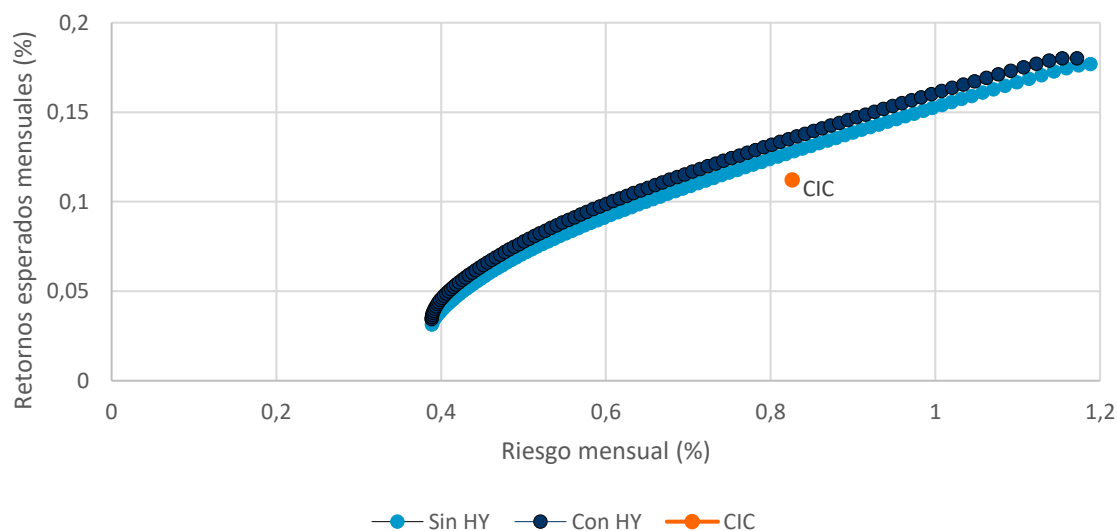
¹⁴ Diversificación en activos alternativos: En busca de nuevas fronteras, 2020. Donetch F, Ruíz J.

demostrado que existen cambios en las matrices de correlaciones con otros activos¹⁵, los cuales dificultan diversificar carteras de inversión en momentos de crisis. Sin perjuicio de lo anterior, la AFC podría invertir en activos alternativos, debido a que estos instrumentos son considerados como de segunda categoría por el Régimen de Inversiones de los Fondos de Cesantía. Los límites vigentes para esta clase de activos corresponden a 2% en el caso de la CIC y 5% en el caso del FCS.

Con respecto a la renta fija extranjera de alto rendimiento, se analizaron distintos índices optando por iBoxx USD Liquid High Yield Index (iboxHY) debido a que presenta un buen desempeño de riesgo retorno y cumple con las consideraciones del artículo 58E de la ley N°19.728. En particular, se observó que el índice iboxHY invierte cerca del 50% en instrumentos con clasificación menor a BB, lo cual implicaría que el *benchmark* incluya activos de títulos restringidos, los cuales poseen límites de 3% en el caso de la CIC y 10% para el FCS.

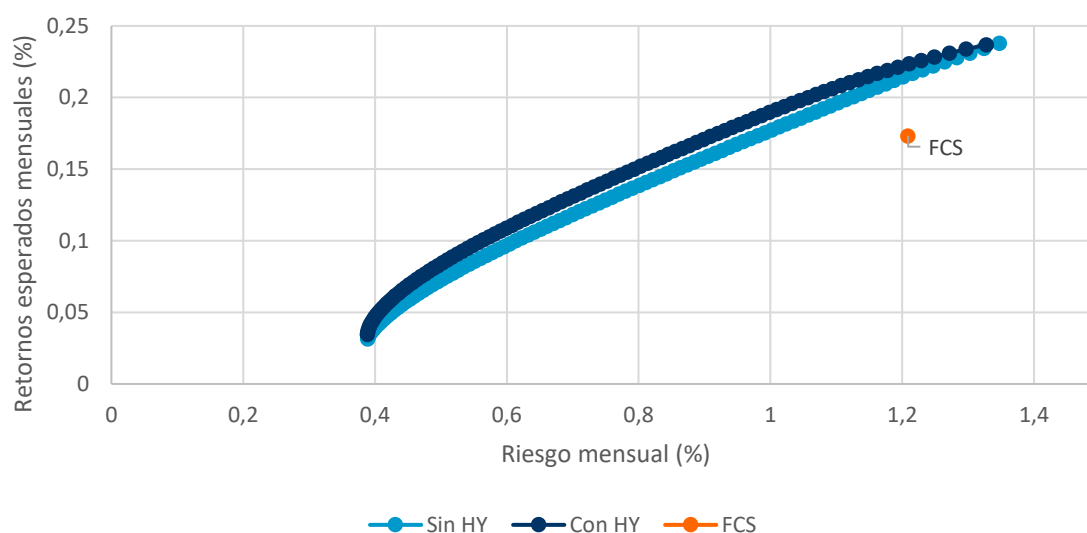
Finalmente, para evaluar el efecto que podría tener en las carteras de referencia, se obtuvo la frontera eficiente de la CIC y el FCS iboxx y con iboxx. En ambos fondos se evidencia que se obtiene un mejor desempeño de riesgo-retorno al incorporar el índice de renta fija extranjera de alto rendimiento.

Gráfico 4a: Frontera eficiente CIC



¹⁵ Alternative Lifestyle: The Evolution of Alternative Investments, 2012. Mileff R, Nathan S, Scott W.

Gráfico 4b: Frontera eficiente FCS



En conclusión, el siguiente cuadro resume cada clase de activo y su índice a utilizar en el estudio de optimización de carteras de referencia:

Cuadro 5: Clase de activo y su índice representativo

Clase de Activos	Índice Representativo
Instrumentos de intermediación financiera nacional	RASP_IF
Instrumentos de renta fija nacional	RASP_RF
Instrumentos de renta variable nacional	INFOCES
Instrumentos de renta variable extranjera	MSCI AC World (MSEUACWF Index)
Instrumentos de deuda extranjera	LEGATRUU Index
Instrumentos de deuda extranjera de alto rendimiento (High Yield)	iBoxx USD Liquid High Yield Index

4.2 Aplicación del modelo media varianza

Para la estimación de la matriz Σ se utilizan dos metodologías. La primera es el método GARCH que fue utilizado en el año 2009, el cual consiste en que se asume que los elementos de la matriz siguen un proceso GARCH en forma individual (Flex-GARCH)¹⁶. La segunda forma de estimar la matriz es

¹⁶ Ledoit, O, Santa-Clara, P y Wolf, M. 2003. “Flexible Multivariate GARCH Modeling with an Application to International Stock Markets”. Review of Economics and Statistics, 85(3), 735-747.

con el método de encogimiento (*Shrunk*)¹⁷, el cual se basa en la combinación lineal entre un modelo libre (matriz de varianza y covarianzas histórica) con un modelo estructural altamente rígido, sesgado y con poco error aleatorio.

El vector de retornos esperados se determina a través de la metodología de Black y Litterman (1992)¹⁸, obteniendo los retornos de equilibrio en base al modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) y una cartera de mercado, que en nuestro caso será el fondo E del Sistema de Pensiones.

La expresión para los retornos de equilibrio Π para n activos queda de la siguiente forma:

$$\Pi = [r_1, r_2, \dots, r_n]' = \lambda \Sigma w^{eq}$$

Con λ como aversión al riesgo promedio y w^{eq} corresponde al portafolio de mercado compuesto por n activos.

Posterior a esto se calcula la frontera eficiente en base a la metodología de Michaud (1998)¹⁹, la cual sigue los siguientes pasos:

1. Utilización como insumo de parámetros: retornos esperados estimados por Black y Litterman (1992), obteniendo un vector de retornos m y la matriz de varianza y covarianzas Σ , previamente calculada por método *Flex-GARCH* o *Shrunk*.
2. Realización de simulaciones de Montecarlo de los retornos, asumiendo una distribución normal multivariada con media m y varianza Σ . Se realizan N simulaciones de este ejercicio. Luego se procede a calcular los nuevos N vectores de m^* y las nuevas N matrices Σ^* . En este trabajo se realizaron 10.000 simulaciones, es decir $N=10.000$.
3. Para cada simulación se elaboran fronteras eficientes de tamaño K , es decir, K es la cantidad de portafolios eficientes que se utilizó para la construcción de las fronteras. En este caso en específico $K=100$. Así se obtienen $N \times K$ portafolios eficientes simulados (10.000×100 portafolios).
4. Para obtener la frontera eficiente, se procede a promediar las N carteras para cada portafolio (K). El cálculo de retornos y riesgo de esta frontera se obtiene con los parámetros originales de m y Σ , con lo cual se construye la frontera eficiente final.

Finalmente, se calcula la línea de mercado para cada frontera utilizando dos alternativas para el activo libre de riesgo: en el caso de la CIC, se utiliza el promedio histórico mensualizado de BCU a 1 año, mientras que para el caso del FCS se utiliza el promedio histórico mensualizado de BCU a 5 años. En los casos en que se utilicen bonos libres de riesgo estos se sumarán a Renta Fija Nacional para el portafolio de FCS, mientras que para la CIC se sumará a Instrumentos de Intermediación Financiera (estos criterios son los mismos del documento elaborado por la Superintendencia de Pensiones en el año 2009).

¹⁷ Ledoit, O. Wolf, M. 2003. "Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix"

¹⁸ *Global Portfolio Optimization*. Financial Analyst Journal

¹⁹ Michaud, R y R. Michaud 1998. "Efficient Asset Management", Oxford University Press

A continuación, se desarrolla el modelo paso a paso, para analizar cada uno de los componentes e insumos de los pasos anteriormente descritos.

4.2.1 La Matriz de Varianza y Covarianzas

La matriz de varianza y covarianzas se obtiene con datos de los índices financieros de las carteras de referencia actuales desde junio 2010 a junio 2022. De esta forma, se utilizan dos métodos: el primero es el método Flex-GARCH que fue desarrollado en el año 2009; el segundo se basa en el método de encogimiento (Shrinkage), el cual se explicará más adelante por qué se sugiere y qué problemas estaría buscando solucionar.

Método Flex-GARCH

La matriz de varianza y covarianzas se calcula en base al modelo Ledoit, Santa-Clara y Wolf (2003), el cual asume que cada elemento de la matriz sigue un proceso GARCH (1,1) de forma individual. Así estimamos tres coeficientes (para cada elemento) que modelan este proceso como se observa en la siguiente ecuación:

$$(4) \quad \text{Cov}[x_{i,t}, x_{j,t} | \Omega_{t-1}] = h_{ij,t} = c_{ij} + a_{ij}x_{i,t-1}x_{j,t-1} + b_{ij}h_{ij,t-1}$$

Donde Ω_{t-1} se refiere a la información condicional hasta el periodo anterior, y $x_{i,t}$ son las observaciones de los eventos realizados de i en el periodo t . El proceso de modelamiento deja de asumir homocedasticidad a través del coeficiente a , a la vez que también asume que la varianza condicionada depende de la varianza condicional del periodo anterior a través de b . El componente b en términos financieros nos dice que instrumentos financieros con mucho ruido tendrían parte de ese ruido trasladado hacia el presente.

Método del encogimiento (Shrunk)

Como segunda forma de estimar la matriz de varianza y covarianza, se utilizó el método de encogimiento de Ledoit y Wolf (2003), el cual se basa en la combinación lineal entre un modelo libre, insesgado y de alto error aleatorio, con otro altamente rígido, sesgado y con poco error aleatorio. El modelo libre es simplemente la matriz de varianza y covarianzas históricas, mientras que el modelo con alta estructura se define como:

$$x_{it} = \alpha_i + \beta_i x_{0t} + \varepsilon_{it}$$

Donde x_{it} son los índices i del portafolio en el momento t , x_{0t} son los retornos de mercado estimados a través de la misma muestra de datos (junio 2010 a junio 2022). Luego se recupera la covarianza de estos índices con la de cada instrumento y se obtienen *priors*.

En particular, los retornos de mercado se basan en el modelo de un factor de Sharpe (1963), es decir, x_{0t} es la diferencia entre los retornos observados y el promedio de estos por índice. Luego se colapsan estas diferencias promediando los valores para cada uno de los periodos²⁰.

Finalmente se combinan ambas estimaciones a través del *Shrinkage intensity*:

$$\text{Matriz covarianzas} = (1 - \alpha)(\text{Varianza muestral}) + \alpha(\text{Varianza con estructura})$$

Donde $\alpha = \frac{k}{T}$. Donde T es igual al número de observaciones y $K = \frac{\pi - \rho}{\gamma}$, siendo π el error de la matriz muestral, γ el error de especificación de la regresión y ρ la covarianza entre los errores de estimación de ambos modelos.

El principal resultado de este método es ajustar las covarianzas que tiene el modelo, mientras que la varianza de cada índice es impuesta por la varianza muestral de los datos, siendo, por lo tanto, igual que la varianza histórica que se calculó. Esto podría ser una preocupación para el cálculo de muchos instrumentos, pues cada vez nos quedaríamos con menos grados de libertad al tener una muestra relativamente pequeña versus un número creciente de varianzas por estimar. Sin embargo, para este trabajo no es de mayor preocupación puesto solo queremos estimar 6 índices con 145 observaciones para cada una de estas.

Los resultados obtenidos de las proyecciones junto a una comparación con la varianza histórica se observan en los siguientes cuadros:

Cuadro 6a: Matriz de Varianza y covarianzas histórica

	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY
RFN	0,0208%	0,0013%	0,0133%	-0,0023%	0,0004%	0,0000%
IFN	0,0013%	0,0017%	-0,0060%	0,0052%	0,0076%	0,0006%
RVN	0,0133%	-0,0060%	0,2886%	0,0462%	-0,0618%	0,0179%
RVE	-0,0023%	0,0052%	0,0462%	0,1748%	0,0598%	0,0480%
RFE	0,0004%	0,0076%	-0,0618%	0,0598%	0,1044%	0,0150%
RFE_HY	0,0000%	0,0006%	0,0179%	0,0480%	0,0150%	0,0721%

Cuadro 6b: Matriz de Varianza y covarianzas Flex-GARCH

	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY
RFN	0,0073%	0,0007%	-0,0150%	-0,0005%	0,0058%	0,0001%
IFN	0,0007%	0,0093%	-0,0621%	0,0088%	0,0223%	-0,0035%
RVN	-0,0150%	-0,0621%	1,0504%	-0,0906%	-0,1147%	0,0690%
RVE	-0,0005%	0,0088%	-0,0906%	0,2024%	0,0459%	0,0439%
RFE	0,0058%	0,0223%	-0,1147%	0,0459%	0,1400%	0,0196%
RFE_HY	0,0001%	-0,0035%	0,0690%	0,0439%	0,0196%	0,0953%

²⁰ Esto significa que el x_{market} es el retorno promedio de un equal wighted pues se promedian estas diferencias, obteniendo para este trabajo un vector de 139x1 el cual representaría los retornos de mercado para cada uno de los 139 meses.

Cuadro 6c: Matriz de Varianza y covarianzas Shrunk

	<i>RFN</i>	<i>IFN</i>	<i>RVN</i>	<i>RVE</i>	<i>RFE</i>	<i>RFE_HY</i>
<i>RFN</i>	0,0208%	0,0013%	0,0131%	-0,0015%	0,0006%	0,0003%
<i>IFN</i>	0,0013%	0,0017%	-0,0055%	0,0051%	0,0072%	0,0007%
<i>RVN</i>	0,0131%	-0,0055%	0,2886%	0,0494%	-0,0563%	0,0195%
<i>RVE</i>	-0,0015%	0,0051%	0,0494%	0,1748%	0,0589%	0,0483%
<i>RFE</i>	0,0006%	0,0072%	-0,0563%	0,0589%	0,1044%	0,0153%
<i>RFE_HY</i>	0,0003%	0,0007%	0,0195%	0,0483%	0,0153%	0,0721%

En los cuadros anteriores se observa que a través del método Flex-GARCH existe un incremento de las varianzas esperadas (diagonal de las matrices), excepto en renta fija nacional. Esto se debe a que el método GARCH tiene memoria más corta y el método Shrunk suaviza el comportamiento histórico.

4.2.2 Retornos esperados

Una vez estimadas las matrices de varianza y covarianzas, podemos estimar los retornos esperados. Para esto se utiliza el modelo de Black-Litterman (1992)²¹, el cual permite considerar *views* que alimenten el modelo, es decir, expectativas exógenas que se tienen sobre el posible rendimiento futuro de los instrumentos. Las *views* son *likelihood* del proceso bayesiano, el cual alimenta al método Black-Litterman. Este aspecto es de gran importancia, sobre todo para el índice de Renta Variable nacional (RVN), que ha tenido en promedio retornos negativos entre junio 2010 a diciembre 2021. Sumado a esto, el modelo determina retornos de equilibrio en base al modelo de CAPM buscando replicar un *benchmark* de mercado que en nuestro caso es el Fondo E de pensiones²². Así, el modelo mezcla las expectativas de los retornos más la *prior* basada en los retornos esperados neutrales, los cuales se obtienen de los retornos de equilibrio implícitos a través de la replicación del *benchmark*.

Las *views* utilizadas corresponden a una proyección de 5 años de retornos simulados 2.000 veces. Los retornos simulados se obtienen a través de un proceso browniano con saltos difusos, los cuales incorporan la posibilidad de ocurrencia de crisis financieras, la probabilidad de crisis utilizada es de un 6,5% anual²³. Las *views* entregadas junto a su nivel de incertidumbre pueden ser observadas en el cuadro 7.

²¹ Detalle del modelo Black y Litterman en Apéndice Técnico Financiero.

²² De la misma forma en que se realizó el documento de carteras referenciales del 2009.

²³ El método de proyección de retornos es el mismo que el utilizado en el Simulador de Pensiones de la Superintendencia de Pensiones de Chile.

Cuadro 7: Expectativas de retornos (views)

	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY
Retorno Esperado	0,191%	0,017%	0,022%	0,643%	0,217%	0,429%
Incertidumbre	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01

Finalmente, los retornos de equilibrio obtenidos para ambos métodos de estimación de matriz de varianza-covarianza se muestran en el cuadro 8.

Cuadro 8: Retornos esperados de equilibrio

Índices	Método Shrunk	Método Flex-GARCH	Retornos históricos
RFN	0,17%	0,13%	0,22%
IFN	0,03%	0,01%	0,03%
RVN	0,04%	0,02%	0,05%
RVE	0,60%	0,61%	0,67%
RFE	0,23%	0,22%	0,23%
RFE_HY	0,38%	0,39%	0,46%

El cuadro anterior muestra los retornos *posterior* del proceso bayesiano, es decir, ya combinada la *prior* con la *likelihood*.

5. FRONTERAS EFICIENTES

Las fronteras que se presentarán a continuación ya tienen considerada las simulaciones de Montecarlo, las cuales se basan en simulaciones que tienen como esperanza los retornos esperados obtenidos por el método de Black-Litterman y las respectivas matrices de varianza-covarianza según el método de estimación (Flex-GARCH o Shrunk). Las simulaciones se hicieron en un horizonte de 120 meses, en otras palabras, se simulan 10 años de posibles caminos que pudo haber tomado el rendimiento de los índices. Así, las fronteras presentadas se desprenden ya de las 10.000 fronteras simuladas y promediadas para los 100 portafolios que construyen la frontera eficiente y la *capital market line*.

Debido a que las carteras óptimas deben cumplir con el Régimen de Inversiones del Seguro de Cesantía, se realizan dos ejercicios por cada método de estimación. El primero corresponde a estimar las fronteras eficientes sin restricciones por instrumentos y la segunda corresponde a estimarlas con las restricciones y límites por instrumento establecidas en el régimen de inversiones.

5.1 Frontera Eficiente de la CIC

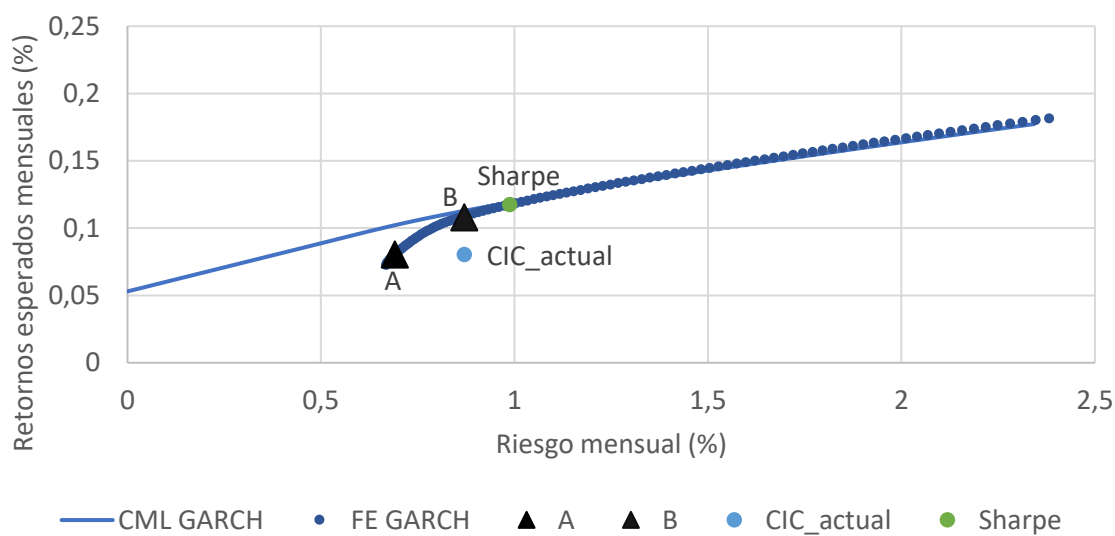
Se obtienen dos fronteras eficientes por método de estimación de la matriz de varianza y covarianzas. La primera frontera se obtiene manteniendo los instrumentos permitidos, pero sin

límites de inversión. La segunda frontera se obtiene incorporando los 6 índices y sus restricciones dentro de la CIC, las cuales se resumen en:

1. Renta variable nacional y renta variable extranjera no pueden ponderar más del 5% del total de la cartera.
2. Renta variable extranjera y Renta fija extranjera no pueden ponderar más del 30% del total de la cartera.
3. El índice de renta fija extranjera de alto rendimiento (iboxHY) no puede ponderar más del 3% de la cartera.

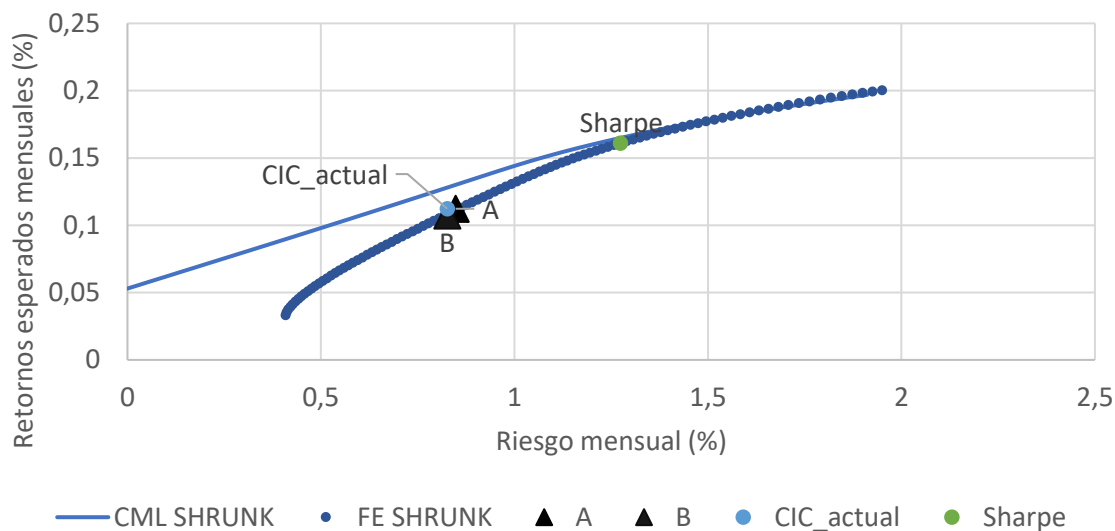
A continuación, se presentan las fronteras eficientes sin restricción:

**Gráfico 5a: Frontera Eficiente CIC, sin restricción
(Método Flex-GARCH)**



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Gráfico 5b: Frontera Eficiente CIC, sin restricción (Método Shrunk)



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

En particular, las carteras eficientes obtenidas en cada frontera son las siguientes:

Cuadro 9a: Carteras eficientes sin restricción por método Flex-GARCH

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual CIC	45,0%	45,0%	-	-	10,0%	-	0,08%	0,87%
Max retorno	67,7%	21,7%	-	-	10,6%	-	0,11%	0,87%
Min volatilidad	60,2%	38,0%	-	-	1,8%	-	0,08%	0,69%
Max Sharpe	65,7%	18,3%	-	-	16,1%	-	0,12%	0,99%

Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Cuadro 9b: Carteras eficientes sin restricción por método Shrunk

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual CIC	45,0%	45,0%	-	-	10,0%	-	0,11%	0,83%
Max retorno	35,1%	50,5%	-	-	14,4%	-	0,11%	0,83%
Min volatilidad	35,9%	49,3%	-	-	14,8%	-	0,11%	0,85%
Max Sharpe	51,3%	18,7%	-	-	30,0%	-	0,16%	1,27%

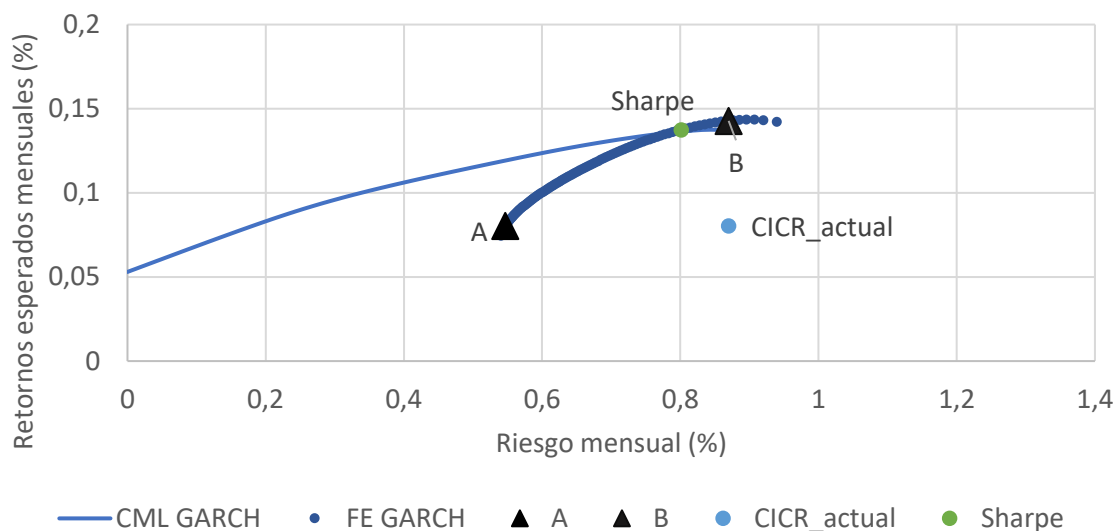
Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Se observa que en el método de varianza por *Shrunk* el portafolio de referencia de la CIC se encuentra muy cerca de la frontera eficiente. Sin embargo, en ambos métodos se encuentra por debajo de la curva de línea de mercado (CML), lo que revela que se pueden obtener mejores

rendimientos riesgo-retorno, sobre todo en el método *Flex-GARCH*. En cuanto a la ponderación de las carteras se observa que en ambos métodos existe un mayor interés por renta fija extranjera (RFE).

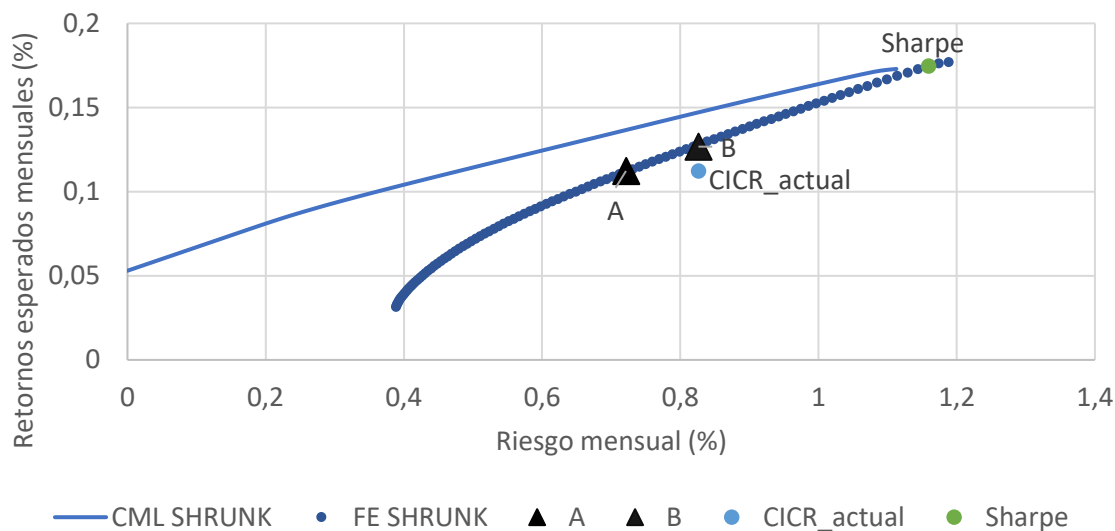
A continuación, se presentan las fronteras eficientes con restricción:

Gráfico 6a: Frontera Eficiente CIC, con restricción
(Método Flex-GARCH)



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Gráfico 6b: Frontera Eficiente CIC, con restricción (Método Shrunk)



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

En particular, las carteras eficientes obtenidas en cada frontera son las siguientes:

Cuadro 10a: Carteras eficientes con restricción por método Flex-GARCH

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual CIC	45,0%	45,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,08%	0,87%
Max retorno	70,2%	10,5%	1,5%	3,1%	12,2%	2,4%	0,14%	0,87%
Min volatilidad	48,2%	45,2%	2,7%	1,2%	0,3%	2,4%	0,08%	0,55%
Max Sharpe	70,9%	12,8%	1,5%	3,2%	9,1%	2,5%	0,14%	0,80%

Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Cuadro 10b: Carteras eficientes con restricción por método Shrunk

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual CIC	45,0%	45,0%	0,0%	0,0%	10,0%	0,0%	0,11%	0,83%
Max retorno	42,2%	42,2%	0,9%	3,5%	8,6%	2,6%	0,13%	0,83%
Min volatilidad	30,7%	57,2%	0,9%	3,3%	5,2%	2,6%	0,11%	0,72%
Max Sharpe	66,7%	12,8%	0,8%	3,6%	13,8%	2,3%	0,17%	1,16%

Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

En comparación a las fronteras sin restricción, se observa que tanto para el método de varianza por *Shrunk* como por el método *Flex-GARCH*, el portafolio de referencia de la CIC se encuentra por debajo de la frontera eficiente, de tal modo que las carteras eficientes logran obtener mejores rendimientos riesgo-retorno. En cuanto a la ponderación de las carteras, se observa que por el método *Flex-GARCH* existe un mayor interés por renta variable nacional (RVN): Junto con esto se observa que, en ambos métodos, intermediación financiera nacional (IFN) aumenta cuando se minimiza volatilidad.

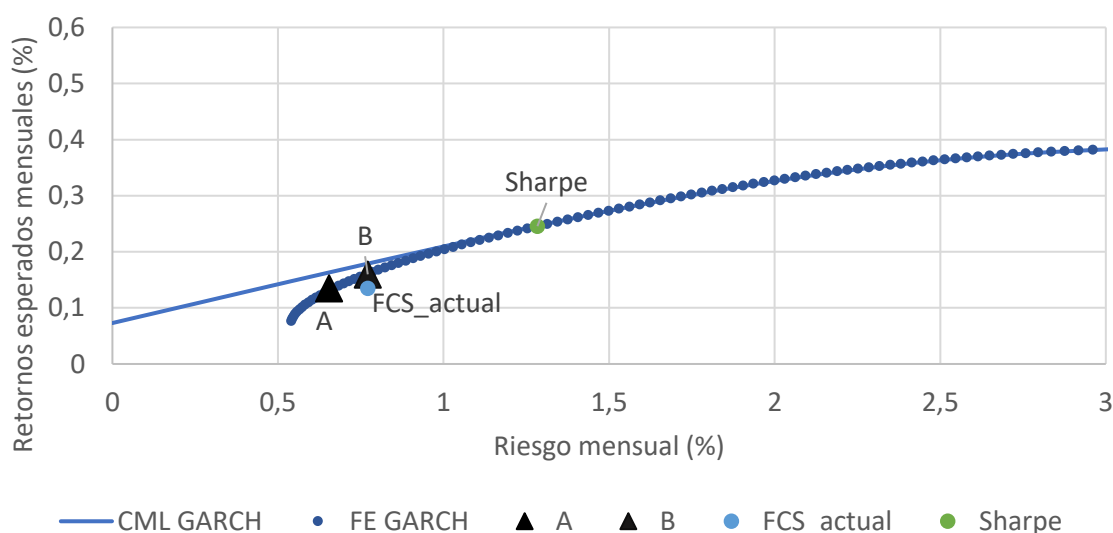
5.2 Frontera Eficiente del FCS

Del mismo modo que en la CIC, se obtienen dos fronteras eficientes por método de estimación de la matriz de varianza y covarianzas. La primera frontera se obtiene sin restringir por instrumento. Por otro lado, la segunda frontera se obtiene incorporando las restricciones de del FCS, las cuales se resumen en:

1. Renta variable nacional y renta variable extranjera no pueden ponderar más del 30% del total de la cartera.
2. Renta variable extranjera y Renta fija extranjera no pueden ponderar más del 30% del total de la cartera.
3. El índice de renta fija extranjera de alto rendimiento (iboxHY) no puede ponderar más del 10% de la cartera.

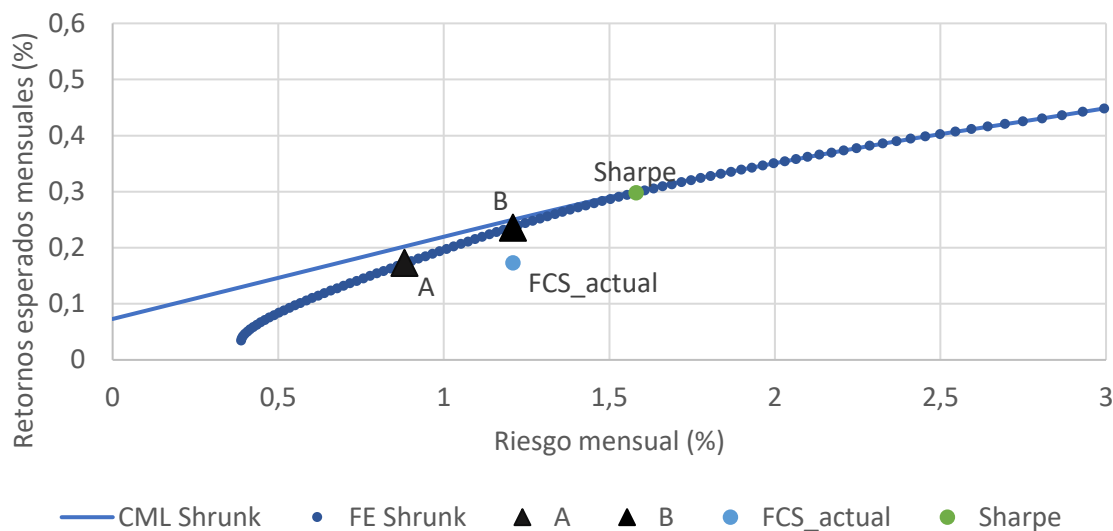
A continuación, se presentan las fronteras eficientes sin restricción:

**Gráfico 7a: Frontera Eficiente FCS, sin restricción
(Método Flex-GARCH)**



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Gráfico 7b: Frontera Eficiente FCS, sin restricción (Método Shrunk)



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

En particular, las carteras eficientes obtenidas en cada frontera son las siguientes:

Cuadro 11a: Carteras eficientes sin restricción por método Flex-GARCH

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual FCS	75,0%	10,0%	5,0%	5,0%	5,0%	0,0%	0,14%	0,77%
Max retorno	57,3%	20,4%	3,0%	7,7%	2,7%	8,8%	0,16%	0,77%
Min volatilidad	54,8%	29,0%	2,7%	5,2%	1,5%	6,8%	0,14%	0,65%
Max Sharpe	48,6%	9,3%	6,1%	10,7%	7,6%	17,7%	0,25%	1,28%

Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Cuadro 11b: Carteras eficientes sin restricción por método Shrunk

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual FCS	75,0%	10,0%	5,0%	5,0%	5,0%	0,0%	0,17%	1,21%
Max retorno	37,1%	21,0%	2,9%	13,3%	7,2%	18,5%	0,24%	1,21%
Min volatilidad	27,0%	44,4%	2,2%	8,5%	4,4%	13,5%	0,17%	0,88%
Max Sharpe	34,3%	7,2%	4,5%	21,1%	9,7%	23,2%	0,30%	1,58%

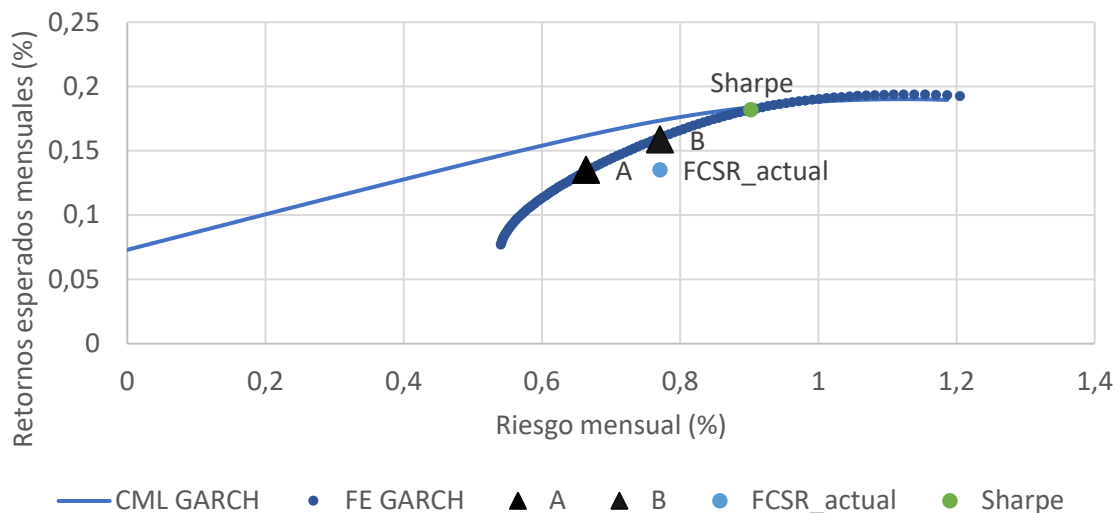
Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Se observa que por el método de varianza por *Flex-GARCH* el portafolio de referencia del FCS se encuentra más debajo de la frontera eficiente, de esta forma las carteras eficientes por este método pueden obtener mejores rendimientos riesgo-retorno. En cuanto a la ponderación de las carteras

se observa que tanto por el método *Shrunk* y *Flex-GARCH* existe un mayor interés por renta variable extranjera (RVE) y menos por renta fija nacional.

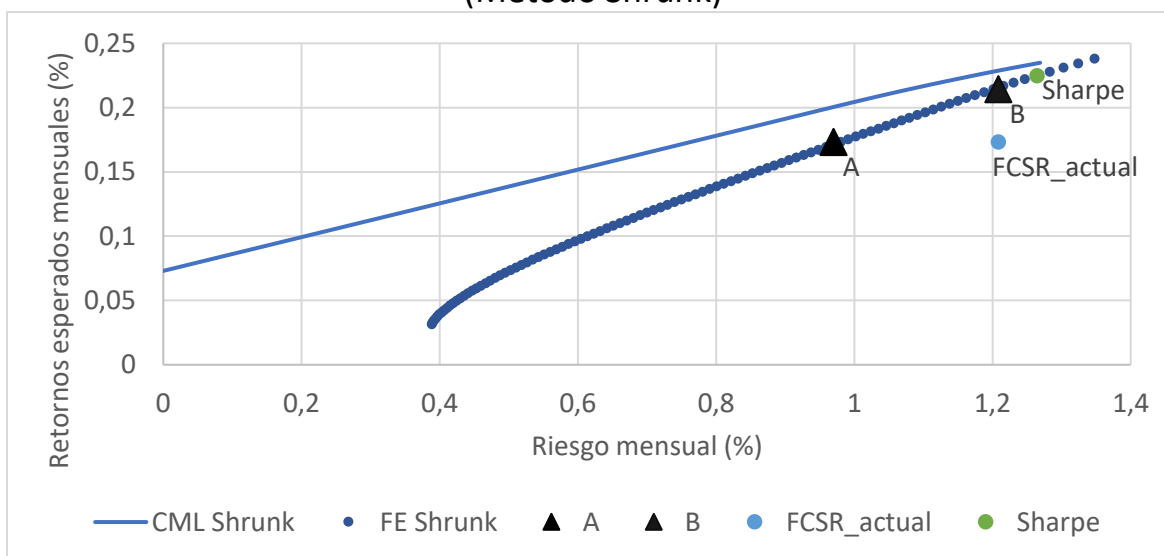
A continuación, se presentan las fronteras eficientes con restricción:

Gráfico 8a: Frontera Eficiente FCS, con restricción (Método Flex-GARCH)



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Gráfico 8b: Frontera Eficiente FCS, con restricción (Método Shrunk)



Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

En particular, las carteras eficientes obtenidas en cada frontera son las siguientes:

Cuadro 12a: Carteras eficientes con restricción por método Flex-GARCH

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual CIC	75,0%	10,0%	5,0%	5,0%	5,0%	0,0%	0,14%	0,77%
Max retorno	60,5%	18,2%	3,4%	8,3%	3,2%	6,3%	0,16%	0,77%
Min volatilidad	57,3%	26,6%	2,8%	5,6%	1,8%	5,9%	0,14%	0,66%
Max Sharpe	60,6%	11,6%	5,0%	11,5%	4,8%	6,4%	0,18%	0,90%

Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Cuadro 12b: Carteras eficientes con restricción por método Shrunk

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo
Actual CIC	75,0%	10,0%	5,0%	5,0%	5,0%	0,0%	0,17%	1,21%
Max retorno	52,6%	17,5%	3,9%	15,7%	5,0%	5,3%	0,21%	1,21%
Min volatilidad	35,9%	39,4%	2,5%	10,2%	4,8%	7,3%	0,17%	0,97%
Max Sharpe	54,5%	15,2%	4,3%	16,4%	4,8%	4,8%	0,22%	1,26%

Fuente: Elaboración Superintendencia de Pensiones

Al igual que en las fronteras sin restricción, se observa que tanto para el método de varianza por *Shrunk* como por el método *Flex-GARCH* el portafolio de referencia del FCS se encuentra por debajo de la frontera eficiente, de tal modo que las carteras eficientes logran obtener mejores rendimientos riesgo-retorno. En cuanto a la ponderación de las carteras se observa un comportamiento similar a las fronteras eficientes sin restricción, esto es más renta variable extranjera y menos renta fija nacional.

6. NUEVAS CARTERAS DE REFERENCIA

En base a los resultados del estudio, se observa que el método *Shrunk* muestra un comportamiento más conservador en la simulación de varianzas y covarianzas, dado que pondera menos el pasado inmediato en comparación al método *Flex-GARCH*, el cual sigue un proceso GARCH (1,1). Por otro lado, debido a que los últimos dos años han sido un periodo excepcional de Pandemia, el método *Shrunk*, que suaviza el comportamiento histórico, reflejaría una mejor proyección del futuro.

Ahora bien, en cada frontera eficiente se identificaron tres puntos, los cuales son: maximizar retorno sujeto a actual nivel de riesgo, minimizar riesgo sujeto a actual nivel de retorno y maximizar premio por riesgo (índice de Sharpe). Debido a que los niveles de liquidez que han tenido los fondos de cesantía durante la pandemia han permitido el pago correcto de beneficios sin dejar de seguir al benchmark, sus niveles de riesgo parecen adecuados. Por lo tanto, se considera prudente maximizar retorno sujeto a actual nivel de riesgo.

Dadas las consideraciones anteriores, las nuevas carteras de referencia son las siguientes:

Cuadro 13: Comparación de Carteras de Referencia

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY
REF CIC	45%	45%	0%	0%	10%	0%
Nueva REF CIC	42,2	42,2	0,9	3,5	8,6	2,6
REF FCS	75%	10%	5%	5%	5%	0%
Nueva REF FCS	52,6	17,5	3,9	15,7	5,0	5,3

Finalmente, en el siguiente cuadro se redondean las ponderaciones. Como ejercicio, se obtiene retorno real mensual promedio, volatilidad mensual e índice de Sharpe para el periodo entre junio 2010 y la última información disponible al cierre de este informe (diciembre 2022). Se observa mejor desempeño de riesgo-retorno de ambas nuevas carteras de referencia.

Cuadro 14: Retorno, Riesgo e índice de Sharpe

Cartera	RFN	IFN	RVN	RVE	RFE	RFE_HY	Retorno	Riesgo	Sharpe
REF CIC	45%	45%	0%	0%	10%	0%	0,12%	0,86%	0,06
Nueva REF CIC	42%	42%	1%	4%	9%	2%	0,14%	0,86%	0,09
REF FCS	75%	10%	5%	5%	5%	0%	0,21%	1,25%	0,08
Nueva REF FCS	53%	17%	4%	16%	5%	5%	0,24%	1,24%	0,11

Nota: Los índices Sharpe de REF CIC se calculan utilizando el retorno promedio de los bonos en UF del gobierno y Banco Central de Chile a 1 año. En el caso de REF FCS se calculan utilizando el mismo instrumento a 5 años.

Al graficar los retornos acumulados desde mayo del 2010 a diciembre 2022 de las vigentes carteras de referencia y las nuevas, propuestas en este estudio, se observa que las nuevas carteras de referencia hubiesen dominado desde el año 2014.

Gráfico 8a: Retorno Acumulado Carteras de referencia CIC

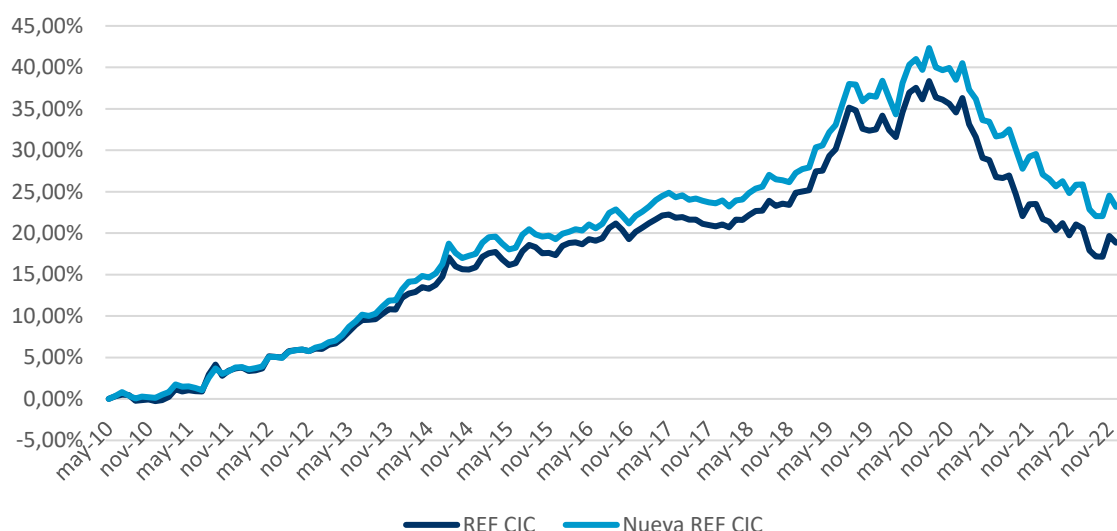
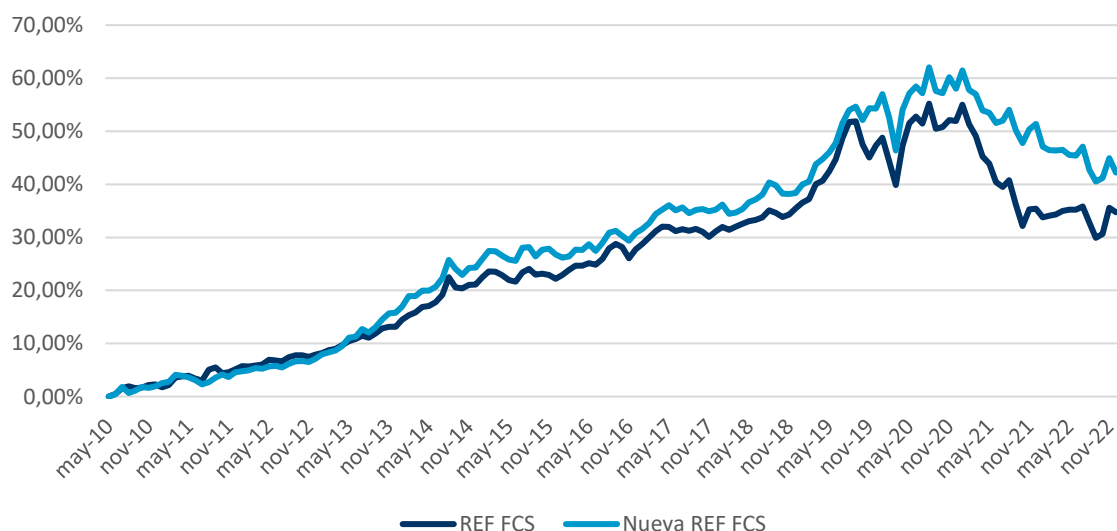


Gráfico 8b: Retorno Acumulado Carteras de referencia FCS



6.1 Simulación en Modelo de Proyección Seguro de Cesantía.

En el modelo de proyección del Seguro de Cesantía²⁴ se proyectan trayectorias laborales hasta 2033 con las carteras de referencia anteriores a las propuestas en este documento y las nuevas carteras de referencia propuestas. En general, se observa un mejor desempeño en ambos Fondos de Cesantía (CIC y FCS), tanto en escenario base como escenario con crisis laboral (1 año) y financiera

²⁴ Céspedes, V. Granados, P. Quintanilla, X. Rivera, N. 2022. “Estudio Actuarial de los Fondos del Seguro de Cesantía”, Superintendencia de Pensiones.

(2 años). Además, individuos que enfrentan cesantía en el horizonte de proyección tendrían mayor saldo acumulado en escenario con las nuevas carteras de referencia. Específicamente, en el caso de un mismo grupo de afiliados cesantes que solicitan beneficios del Seguro de Cesantía en el año 2025, se observa que el saldo promedio en su Cuenta Individual de Cesantía (CIC) al momento de realizar la solicitud es un 3,6% mayor con las nuevas carteras de referencia en comparación con el saldo proyectado utilizando las carteras de referencia anteriores.

En el siguiente cuadro se obtienen las diferencias porcentuales entre los patrimonios proyectados con carteras de referencia anteriores y nuevas. Se observa que tanto en escenario normal como en crisis los patrimonios son mayores con las nuevas carteras de referencia, y como se puede observar el FCS es el que tiene mayores diferencias, en el escenario normal un 2,1% más y en escenario con crisis un 1,9% más.

Cuadro 15: Patrimonio proyectado a diciembre 2033 (MM\$)

Fondo	Cartera de referencia Anterior	Cartera de referencia Nueva	Diferencia
Patrimonio CIC Normal	10.174.974	10.337.908	1,6%
Patrimonio CIC Crisis	9.156.313	9.264.018	1,2%
Patrimonio FCS Normal	6.526.262	6.661.204	2,1%
Patrimonio FCS Crisis	5.871.622	5.980.395	1,9%

7. ESQUEMA DE PREMIOS Y CASTIGOS

Una vez actualizadas las carteras de referencia, se deben actualizar las bandas del sistema de premios y castigos, las cuales están definidas en la ley N° 19.728 y en el Régimen de Inversiones de los Fondos de Cesantía.

En particular, el artículo 42 de la ley N°19.728 dispone lo siguiente: “Cada mes que la rentabilidad real del Fondo de Cesantía Individual y del Fondo de Cesantía Solidario, de los últimos seis meses, supere la rentabilidad real respectiva que determine el Régimen de Inversión de los Fondos de Cesantía, conforme a lo dispuesto en el artículo 58E, considerando la volatilidad de la diferencia entre la rentabilidad del fondo respectivo y su carteras referencial, la comisión cobrada será la comisión base a que se refiere el artículo 30, incrementada en un diez por ciento. Por su parte, en cada mes en que la rentabilidad real del Fondo de Cesantía y del Fondo de Cesantía Solidario, de los últimos seis meses, sea inferior a la rentabilidad real respectiva que determine el Régimen de Inversión de los Fondos de Cesantía, conforme a lo dispuesto en el artículo 58E, considerando la volatilidad de la diferencia entre la rentabilidad del fondo respectivo y su cartera referencial, la comisión cobrada será la comisión base ya referida, reducida en un diez por ciento”.

El ancho de banda del sistema de premios y castigos se obtiene a través de una cartera sensibilizada y la cartera de referencia vigente, que en este caso corresponde a las carteras de referencias actualizadas en este documento.

Se considera la cartera sensibilizada como aquella que alcanza la mayor volatilidad dentro de un conjunto de combinaciones de retorno y volatilidad eficientes, dados los límites de inversión establecidos en el Régimen de Inversiones (RI), los márgenes de holgura por tipo de fondo son:

- FCS: margen de holgura de un 5% por las clases de activos presentes en la cartera referencial. Adicionalmente, un máximo de 30% del total de la cartera para renta variable, máximo de 30% del total de la cartera para renta extranjera y máximo de 10% en renta fija de alto rendimiento (high yield).
- CIC: margen de holgura de un 5% por las clases de activos presentes en la cartera referencial. Adicionalmente, un máximo de 5% del total de la cartera para renta variable, máximo de 30% del total de la cartera para renta extranjera y máximo de 3% en renta fija high yield.

Junto con lo anterior, se obtienen carteras sensibilizadas para ambos fondos con el fin de incorporar la inversión en activos de segunda categoría, en línea con lo establecido en el RI, de tal modo que para el FCS se agrega un máximo de 5% del índice Russell2000 y para la CIC un máximo de 2% en el mismo índice.

Finalmente, de acuerdo con el RI, el ancho de banda de cada Fondo de Cesantía corresponde a la siguiente fórmula:

$$\text{Ancho de Banda} = 2 * z_p * \sigma_{(B-M)}$$

Donde:

z_p : Corresponde al inverso de una distribución normal estándar de probabilidad acumulada.

p : Corresponde al percentil 80, siendo el percentil 20 es el que se utilizará para determinar la disminución.

$\sigma_{(B-M)} = \sqrt{\sigma_B^2 + \sigma_M^2 - 2\sigma_{B,M}}$: Medida de dispersión entre la cartera referencial y la cartera sensibilizada.

σ_B^2 : Corresponde a la varianza de los retornos reales semestrales de la cartera referencial, determinada de conformidad a los retornos reales semestrales de los últimos 90 meses.

σ_M^2 : Corresponde a la varianza de los retornos reales semestrales de la cartera sensibilizada, determinada de conformidad a los retornos reales semestrales de los últimos 90 meses.

$\sigma_{B,M}$: Corresponde a la covarianza entre los retornos semestrales de la cartera referencial y los retornos semestrales de la cartera sensibilizada, determinada de conformidad a los retornos reales semestrales de los últimos 90 meses.

Cuadro 16: Carteras de referencia y Carteras Sensibilizadas

Clase de Activos	Media-Varianza Black & Litterman			
	CIC		FCS	
	Benchmark	Sensibilizada	Benchmark	Sensibilizada
Renta Fija Nacional	42,0%	40,5%	53,0%	48,5%
Intermediación Financiera Nacional	42,0%	36,5%	17,0%	11,9%
Renta Variable Nacional	1,0%	0,0%	4,0%	8,9%
Renta Variable Extranjera	4,0%	4,9%	16,0%	20,8%
Renta Fija Extranjera	9,0%	13,8%	5,0%	0,2%
RFE High Yield	2,0%	3,0%	5,0%	8,7%
Russell2000 (RU20INTR Index)	-	1,2%	-	1,1%

Nota: Los 90 meses comprenden de mayor 2015 a octubre 2022, ambos meses incluidos

Por lo tanto, las nuevas bandas de premios y castigos con su respectivo tracking error se señalan en la siguiente tabla:

Cuadro 17: Nuevos Anchos de Bandas

	Anteriores		Nuevas	
	CIC	FCS	CIC	FCS
Ancho de Banda	0,80%	1,90%	0,99%	1,55%
Tracking error asociado	0,67%	1,60%	0,83%	1,30%

Sin perjuicio de lo anterior, en resolución N° 184 de fecha 30 de enero de 2023, se establece un periodo de convergencia para la adecuación de la cartera de inversiones de los Fondos de Cesantía considerando las nuevas carteras de referencia, comprendido desde el primer día del mes subsiguiente al de la fecha de emisión de la resolución N°184 y hasta el término de las operaciones de la Sociedad Administradora de Fondos de Cesantía. Durante el periodo señalado se establece lo siguiente:

1. La metodología para calcular la procedencia de un incremento o disminución de la comisión que puede cobrar la Sociedad Administradora de Fondos de Cesantía, según el rendimiento de las inversiones realizadas, definida en la sección II.2 Distribución de Retornos, considerará lo siguiente:

El ancho de banda será calculado de la siguiente manera:

$$\text{Ancho de Banda} = 3 * Z_p * \sigma_{(B-M)}$$

Resultando un ancho de banda transitorio para las Cuentas Individuales por Cesantía de 1,48 puntos porcentuales, el cual tiene asociado un Tracking Error anualizado estimado en 124 puntos base, para retornos semestrales. Del mismo modo, el ancho de banda para el

Fondo de Cesantía Solidario será de 2,33 puntos porcentuales, con un Tracking Error anualizado estimado en 195 puntos porcentuales, para retornos semestrales.

2. Los excesos de inversión que se puedan producir como consecuencia de las modificaciones que esta resolución introduce al régimen de inversión no se considerarán de responsabilidad de la Administradora.
3. Los plazos para regularizar dichos excesos de inversión se contarán desde la fecha en que inicie operaciones la Sociedad Administradora de Fondos de Cesantía de Chile III S.A.

CONCLUSIONES

Este trabajo fue el resultado del análisis de la División de Estudios entre 2018 y 2022, que develaba que las actuales carteras de referencia al mejorar su diversificación podrían efectivamente obtener mayores retornos a un nivel adecuado de riesgo. De forma similar, la Administradora de Fondos de Pensión solicitó entre los años 2018 y 2020 incluir renta variable a la CIC, como también mejorar la diversificación de ambas carteras de referencia.

El estudio entrega una mayor diversificación en las ponderaciones de los índices de los Fondos de Cesantía- Adicionalmente, incorpora renta variable (nacional y extranjera) a la CIC y renta fija extranjera de alto rendimiento a ambos fondos. Todo el proceso contó con la opinión del Consejo Técnico de Inversiones para los Fondos de Cesantía, quienes se pronunciaron favorablemente respecto de los cambios propuestos, junto con la División de Desarrollo Normativo y la División Financiera de la Superintendencia de Pensiones.

En definitiva, se espera que el cambio en las carteras de referencia permitirá un mejor desempeño de los fondos de cesantía en el cumplimiento de su objetivo fundamental, financiar beneficios de cesantía.

BIBLIOGRAFÍA

- Benvin, E. Berstein, S. Fuentes, O. Miranda, J. Torrealba, N y Vera, M. (2009) Documento de Trabajo N°34 Carteras Referenciales y Esquemas de Premios y Castigos para los Fondos de Cesantía. Superintendencia de Pensiones.
- Berstein, S. Et al. (2010) Seguro de Cesantía en Chile. Superintendencia de Pensiones, Santiago de Chile.
- Black, F. y Litterman, R. (1992) Global Portfolio Optimization. Financial Analyst Journal.
- Bravo, D. Castillo, J. y Ruiz-Tagle, J. (2007). Documento de Trabajo N°22: Estudio actuarial de los fondos de cesantía. Superintendencia de Pensiones.
- Campolieti, G y Makarov, R. (2014). Financial Mathematics: A Comprehensive Tretment.
- Cerda, R y Coloma, F. (2009). Documento de Trabajo N°33: Estudio actuarial de los fondos de cesantía 2008. Superintendencia de Pensiones.
- Céspedes, V. Granados, P. Quintanilla, X. Rivera, N. (2022). Documento de Trabajo N°70. Estudio Actuarial de los Fondos del Seguro de Cesantía. Superintendencia de Pensiones.
- Donetch, F y Ruíz J. (2020). Diversificación en activos alternativos: En busca de nuevas fronteras. Repositorio Tesis Postgrado, Universidad de Chile.
- Granados, P. Hernández, C. y Salvo E. (2020). Documento de trabajo N°64: Funcionamiento de carteras de referencia de los fondos de cesantía. Superintendencia de Pensiones.
- Jean-Luc Prigent. (2007) Portfolio Optimization and Performance Analysis. Chapman & Hall/CRC.
- Jorion Garp, P. (2011) Financial Risk Manager Handbook, sixth edition.
- Ledoit, O. Wolf, M. (2002) Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. Journal of empirical finance ELSEVIER, Amsterdam, Netherlands.
- Ledoit, O, Santa-Clara, P y Wolf, M. 2003. "Flexible Multivariate GARCH Modeling with an Application to International Stock Markets". Review of Economics and Statistics, 85(3), 735-747.
- Ledoit, O. Wolf, M. 2003. "Honey, I Shrunk the Sample Covariance Matrix"
- Lefort, G. y Mejido, F. (2014). Estudio Funcionamiento, Carteras de referencia, Fondos de Cesantía. Le Fort Economía y Finanzas, Superintendencia de Pensiones.
- Markowitz, H. (1952) Portfolio selection. Journal of Finance.
- Menares, F. Rivera, N. Palominos, C. Quintanilla, X. (2020). Estudio Actuarial de los Fondos del Seguro de Cesantía. Superintendencia de Pensiones.
- Mileff, R, Nathan S y Scott W. (2012). Alternative Lifestyle: The Evolution of Alternative Investments. Journal of Wealth Management, 15, 1, 40.

APÉNDICE TÉCNICO FINANCIERO

1. Análisis de Performance de una cartera

1.1. Riesgo Absoluto vs Riesgo Relativo

El análisis del performance o desempeño es el proceso mediante el cual se miden y evalúan las decisiones de gestión de inversiones. Este proceso, se puede dividir en tres pasos:

1° El análisis de desempeño comienza con el cálculo del rendimiento total, que luego se compara con el benchmark (activo, índice o cartera de referencia) en términos de riesgo total y relativo.

2° El análisis de desempeño de una cartera con su benchmark se descompone en rendimientos diferenciales. Esto generalmente incluye la asignación de activos, la selección de divisas, la selección de la industria y la selección de seguridad. El riesgo también se atribuye a estos factores.

3° La apreciación del desempeño es la evaluación del desempeño ajustado al riesgo y la habilidad del inversor. Esto implica hacer un juicio sobre si el rendimiento superior se debe a la suerte o a la habilidad.

El primer paso de la evaluación del rendimiento es la medición adecuada de los rendimientos periódicos. Esto no siempre es obvio debido a que el valor de un portafolio se ve afectado por las entradas y salidas de efectivo, que están fuera del control del administrador de inversiones. Hasta ahora, el estándar de la industria es la **tasa de rendimiento ponderada en el tiempo (TWRR)**. Este método implica la valoración periódica de la cartera, y ciertamente antes de los flujos de efectivo. Los retornos se vinculan por capitalización durante el período. Supongamos, por ejemplo, que R_t es el rendimiento diario. Entonces, el rendimiento mensual en T días (T depende de los días hábiles) es:

$$(1 + R) = [(1 + R_1)(1 + R_2)(1 + R_3) \dots (1 + R_T)]$$

El método TWRR proporciona una medida del rendimiento que no es sensible al momento ni a la cantidad de flujos de efectivo.

Este método difiere de la tasa de rendimiento ponderada en dinero (MWRR), que es la tasa interna de rendimiento de una cartera teniendo en cuenta todos los flujos de efectivo. Esto es similar a un rendimiento hasta el vencimiento de un bono y es fácil de calcular. El método MWRR, sin embargo, no revaloriza la cartera en pasos intermedios y, por lo tanto, proporciona números de rendimiento que dependen de la oportunidad y el tamaño de los flujos de efectivo. Como tal, se considera inferior al TWRR.

A continuación, el riesgo puede medirse a partir de retornos o posiciones. Podemos tomar dos puntos de vista de riesgo.

Riesgo Absoluto: Usando la desviación estándar como medida de riesgo y definiendo P como el valor inicial de la cartera y R_p como la tasa de retorno de la cartera. El riesgo absoluto es:

$$\sigma(\Delta P) = \sigma\left(\frac{\Delta P}{P}\right)P = \sigma(R_p)P$$

Riesgo Relativo: Se mide con un benchmark (índice de referencia) y representa el riesgo de gestión. Al definir "B" como el benchmark, el diferencial $e = R_p - R_B$, el cual es conocido como tracking error (error de seguimiento). El riesgo relativo es:

$$\sigma(e)P = [\sigma(R_p - R_B)]P = \left[\sigma\left(\frac{\Delta P}{P} - \frac{\Delta B}{B}\right)\right]P = \omega P$$

Donde ω es llamado tracking error volatility (TEV), o algunas veces active risk. Definimos σ_P y σ_B como la volatilidad de la cartera y el benchmark, y ρ como su correlación entre ambos, el tracking error volatility es:

$$\omega = \sqrt{\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_B + \sigma_B^2}$$

Observación: El riesgo relativo es mucho más pequeño que el riesgo absoluto, esto se debe a que el portafolio esta correlacionado con su benchmark.

1.2. Medición del rendimiento ajustado al riesgo

Esta dicotomía entre retornos absolutos y relativos nos lleva a la medición de desempeño ajustado por riesgo.

1.2.1. Sharpe Ratio (SR)

Mide la rentabilidad adicional por unidad de riesgo, por sobre un activo o portafolio libre de riesgo.

$$SR = \frac{(\mu(R_P) - R_f)}{\sigma(R_P)}$$

De la misma forma, se puede calcular el Sharpe Ratio del benchmark:

$$SR = \frac{(\mu(R_B) - R_f)}{\sigma(R_B)}$$

El Sharpe Ratio se centra en el riesgo total medido en términos absolutos. Debido a que el riesgo total incluye tanto el riesgo sistemático como idiosincrático, esta medida es apropiada para carteras que no están muy diversificadas (es decir, que tienen un gran riesgo idiosincrático).

1.2.2. Information Ratio

Representa el exceso de retorno de un activo respecto a un benchmark, por unidad de riesgo relativa al benchmark. En otras palabras, se puede definir como el exceso de retorno por unidad de Tracking Error Volatility.

$$Information\ Ratio = \frac{(\mu(R_B) - R_f)}{TEV}$$

1.2.3. Capital Asset Pricing Model (CAPM)

A mediados de los años sesenta Sharpe, Lintner y Treynor desarrollaron el modelo de valoración de activos financieros (Capital Asset Pricing Model, CAPM). Los supuestos en los que se basa este modelo son los siguientes:

- i. Todos los inversores eligen carteras eficientes en el sentido media-varianza
- ii. Los inversores valoran igual un aumento de los dividendos (o intereses) y un aumento equivalente de las ganancias de capital.
- iii. Es un modelo de un solo periodo, en el que en el momento inicial los inversores forman sus carteras y las mantienen hasta el final del periodo.

- iv. Los inversores tienen las mismas expectativas sobre la distribución de probabilidad de los rendimientos de los activos durante el periodo en cuestión (tienen expectativas homogéneas).
- v. Los activos son infinitamente divisibles.
- vi. No existen costes de transacción ni impuestos
- vii. Es posible prestar y pedir prestado indefinidamente al mismo tipo de interés, R_f .
- viii. Todos los inversores tienen las mismas oportunidades de inversión, aunque tengan distinto presupuesto.

En concreto la ecuación del CAPM es la siguiente:

$$R_{P,t} - R_{f,t} = \alpha_t + \beta_t(R_{B,t} - R_{f,t}) + \varepsilon_{P,t}$$

Donde:

$R_{P,t}$: Rendimiento del portafolio (cartera) en el tiempo t.

$R_{f,t}$: Rendimiento del activo libre de riesgo en el tiempo t.

$R_{B,t}$: Rendimiento del benchmark en el tiempo t.

$\varepsilon_{P,t}$: Error aleatorio que representa el riesgo diversificable del portafolio en el periodo t.

β_t : Sensibilidad del portafolio frente a los excesos de rendimiento del benchmark en el periodo t. En otras palabras, es una medida de riesgo que describe la volatilidad del portafolio con respecto al benchmark.

α_t : Alpha de Jensen, la cual representa el exceso de rendimiento del portafolio que se esperaría si el exceso de rendimiento del benchmark es igual a cero en el periodo t.

Específicamente, cuando $\alpha_t > 0$ el resultado es favorable para el portafolio, ya que se podría concluir que el administrador de la cartera gestionaría con una calidad e interpretación superior de la información que el benchmark. En cambio, un $\alpha_t < 0$ evidencia una gestión pobre en relación al benchmark.

2. Modelo de Black-Litterman (BL)

La implementación del modelo de BL realizado en este documento se realizó a través de la plataforma *Matlab* basándose en las indicaciones que entrega el programa²⁵.

BL es un proceso bayesiano en base a la noción de que los retornos de los índices siguen un proceso estocástico sujeto a una esperanza y una varianza. BL absorbe esto y lo mezcla con el modelo CAPM el cual permite entregar un equilibrio de mercado con retornos esperados neutrales. Se dice neutrales porque a diferencia de los bayesianos donde se utilizan creencias (*likelihood*), el componente neutral obtiene los retornos en base a un equilibrio de mercado y un nivel de aversión al riesgo del inversionista representativo. BL permite así incorporar creencias o expectativas que se pueden tener sobre los índices junto a un nivel de incertidumbre dado.

En primer lugar, se entregan las creencias de los retornos P junto a un nivel de incertidumbre Ω . Luego de esto se procede a calcular los retornos con visiones neutrales, es decir, la parte del modelo que se base en el CAPM.

El portafolio de equilibrio se desprende de la minimización de una diferencia entre el portafolio de mercado y un benchmark que trata de seguir el portafolio de mercado. En 2009 la Superintendencia de Pensiones utilizó como benchmark el Fondo E del sistema de pensiones. El portafolio de mercado se conforma con los cinco índices disponibles sujeto a ciertas restricciones, quedando de la forma general:

$$\min_w \frac{1}{2} \|C * w - d\| \text{ sujeto a: } \begin{cases} A * w \leq b \\ Aeq * w = beq \\ lb \leq w \leq ub \end{cases}$$

Donde C son los retornos de los índices originales, w son los pesos del portafolio de mercado que se quiere obtener, y d el benchmark que replicamos. En relación a las restricciones la primera es una restricción de desigualdades lineales, la segunda una restricción relacionada con la suma de los ponderadores, que en este documento suman 1 (no hay venta corta) y la tercera restricción establece umbrales para los pesos.

El resolver la minimización, se debe calcular el nivel de aversión al riesgo del inversionista genérico. El grado de aversión λ se obtiene a través del cálculo:

$$\lambda = \frac{\text{Sharpe Ratio}}{\sigma_m}$$

Donde σ_m es la desviación estándar del portafolio de mercado.

²⁵ Para más información sobre la implementación del código, puede recurrir al siguiente enlace: <https://la.mathworks.com/help/finance/black-litterman-portfolio-optimization.html>

Obtenido el nivel de aversión, se calculan los retornos de equilibrio. Asumiendo que el portafolio de mercado maximiza el Sharpe Ratio, el retorno implícito se obtiene por optimización inversa a través del producto:

$$\Pi = \lambda * \Sigma * w$$

Luego, se combina la *prior* basada en retornos históricos y sus posteriores retornos implícitos con la *likelihood* basada en las expectativas que se tienen sobre los retornos futuros de los índices. Los retornos finales resultado de resolver lo siguiente:

$$\mu = [P^t \Omega^{-1} P + C^{-1}]^{-1} [P^t \Omega^{-1} q + C^{-1} \Pi]$$

Donde P es una matriz de retornos esperados de las views, Ω es el nivel de incertidumbre que se tiene sobre estos, q es un vector que determina los instrumentos relacionados con la matriz P , C es el nivel de incertidumbre de la *prior* Π , es decir, de los retornos históricos, donde su valor se encuentra inversamente relacionado al número de observaciones (a mayor tamaño de muestra menos incertidumbre) y directamente relacionado con la varianza de la muestra (en nuestro caso la matriz de varianza y covarianzas Flex-GARCH).

