

**Serie Documentos de Trabajo**  
Superintendencia de Administradoras de Fondos de Pensiones  
Teatinos 317.  
Santiago, Chile.

[www.safp.cl](http://www.safp.cl)

**DOCUMENTO DE TRABAJO N° 25**

REFLEXIONES SOBRE LA POLÍTICA DE INVERSIÓN  
DE LOS FONDOS DE CESANTÍA

Pablo Castañeda  
Eduardo Fajnzylber

Mayo 2008



Los **Documentos de Trabajo** son una línea de publicaciones de la Superintendencia de Administradoras de Fondos de Pensiones, que tienen por objeto divulgar trabajos de investigación económica realizados por profesionales de esta institución, encargados o contribuidos por terceros. Con ello se pretende incentivar la discusión y debate sobre temas relevantes del sistema previsional o que incidan en él, así como ampliar los enfoques sobre estos fenómenos.

Los trabajos aquí publicados tienen carácter preliminar y están disponibles para su discusión y comentarios. Los contenidos, análisis y conclusiones que puedan derivar de los documentos publicados son de exclusiva responsabilidad de su(s) autor(es) y no reflejan necesariamente la opinión de la Superintendencia de A.F.P.

Si requiere de mayor información o desea tomar contacto con quienes editan estos documentos, contacte a: [documentosdetrabajo@safp.cl](mailto:documentosdetrabajo@safp.cl)

Si desea acceder a los títulos ya publicados y/o recibir las futuras publicaciones, por favor regístrese en nuestro sitio web: [www.safp.cl](http://www.safp.cl)

The Working Papers series of the Superintendence of Pension Fund Administrators (SAFP) disseminates economic research conducted by the SAFP staff, entrusted or contributed by third parties. The purpose of the series is to contribute to the discussion and debate of relevant issues related to the Pension System, as well as to extend the approaches on these phenomena.

These papers are preliminary research for its discussion and comments. The contents, analysis and conclusions presented in these papers are exclusively those of the author(s) and do not necessarily reflect the position of the SAFP.

To ask for further information or to contact the editor committee, please write to: [documentosdetrabajo@safp.cl](mailto:documentosdetrabajo@safp.cl)

To access the papers already published or to receive by e-mail the latest list of working papers published, please register yourself at our website: [www.safp.cl](http://www.safp.cl)

Superintendencia de Administradoras de Fondos de Pensiones  
Teatinos 317.  
Santiago, Chile.  
[www.safp.cl](http://www.safp.cl)

# Reflexiones sobre la Política de Inversión de los Fondos de Cesantía\*

Pablo Castañeda\*\* Eduardo Fajnzylber

*Departamento de Investigaciones, Superintendencia de AFP*

Este borrador: Abril 2008

Primer borrador: Noviembre 2007

## Resumen

El Seguro de Cesantía es una de las innovaciones más importantes de la seguridad social chilena del último tiempo. Uno de sus principales pilares lo constituye el carácter pre-financiado de sus beneficios, de donde nace la importancia de que los fondos acumulados se inviertan adecuadamente.

En este artículo se analizan las consideraciones que debiesen guiar la inversión de los Fondos de Cesantía. En particular, se revelan los componentes de las estrategias de inversión que resultan óptimas para administrar los fondos acumulados en las Cuentas Individuales de Cesantía y en el Fondo de Cesantía Solidario, de acuerdo a lo que prescribe un modelo de selección de cartera dinámico que captura los objetivos de inversión de cada fondo. Los resultados obtenidos sugieren la conveniencia de diferenciar la política de inversión de ambos fondos.

Adicionalmente, por medio de un ejercicio de simulación se exploran los efectos de permitir que los fondos acumulados puedan invertir en instrumentos de renta variable. Los resultados indican que las ganancias medidas en relación a la distribución de las tasas de reemplazo y el valor del Fondo de Cesantía Solidario podrían resultar considerables.

*Clasificación JEL:* D81; G11; G18; y H55.

*Palabras clave:* Cartera de referencia; Selección de cartera; Seguro de cesantía.

---

\*Se agradece especialmente a Solange Berstein, Alejandro Micco, Eduardo Walker, a los participantes del seminario de la SVS y a los integrantes del Departamento de Investigación de la SAFP por sus valiosos comentarios y sugerencias. Isabel Poblete y Mario Vera prestaron una excelente asistencia para esta investigación.

\*\*Correo: <pcastaneda@safp.cl>

# 1. Introducción

Una de las innovaciones más recientes de la seguridad social chilena corresponde al Seguro de Cesantía (SC), que inició su funcionamiento en Octubre de 2002. El SC es un mecanismo de protección al ingreso laboral que está basado en la capitalización individual y el financiamiento tripartito —empleadores, trabajadores y Estado. Una de sus características más distintivas de su diseño está dada por el hecho que los beneficios comprometidos están completamente pre-financiados, de donde se deriva la importancia de que los ahorros acumulados se inviertan de manera apropiada. En este artículo se discuten algunas consideraciones relativas a los lineamientos que debiesen guiar la inversión de los recursos acumulados, los que a la postre tienen directa relación con la calidad del beneficio que presta el mecanismo.

En la actualidad, los beneficios a que pueden optar los trabajadores afiliados al SC provienen de dos fuentes: un componente pre-financiado financiado del ahorro acumulado en las Cuentas Individuales de Cesantía (CIC), y un componente solidario que depende de la elegibilidad del individuo al Fondo de Cesantía Solidario (FCS), además del grado de solvencia de este último.<sup>1</sup> Asimismo, el monto del beneficio que un trabajador puede recibir depende de la relación contractual entre éste y el empleador respectivo, así como de la causal que haya provocado el término de la relación contractual; Berstein *et al.* (2007).

De acuerdo a la legislación vigente, los fondos acumulados (i.e., la suma de los ahorros en las CIC y en el FCS) pueden ser invertidos en los mismo instrumentos autorizados para los Fondos de Pensiones Tipo E; esto es, instrumentos de renta fija (nacional y extranjera), siendo además la estrategia de inversión de las CIC y del FCS igual por efecto de la ley.<sup>2</sup>

En relación a la administración de los Fondos de Cesantía, por la calidad de monopolio legal que ostenta el administrador de los fondos —seleccionado por medio de una licitación pública para ser el administrador exclusivo por espacio de 10 años— la legislación considera un esquema de premios y castigos basado en la diferencia de rentabilidad obtenida por el administrador de los Fondos de Cesantía, respecto de aquella obtenida por los Fondos de Pensión Tipo E. A este respecto, Castañeda (2006) muestra que la existencia de un esquema de incentivos como el señalado motiva al administrador a imitar la cartera de los Fondos de Pensión Tipo E cuando existe una posibilidad alta de obtener un premio, o de evitar un castigo. De lo anterior se desprende que en la medida que dichos

---

<sup>1</sup>La importancia del grado de solvencia del FCS se debe al mecanismo de ajuste de beneficios a la baja, en caso que los recursos de que disponga el FCS sean insuficientes.

<sup>2</sup>Si bien la Ley N° 19.728 de 2001 —que regula el Seguro de Cesantía— no obliga a que las CIC y el FCS tengan una estrategia de inversión común, la existencia de un mecanismo de premios y castigos vinculado a una cartera de inversión única restringe esta posibilidad en la práctica.

eventos tengan una alta probabilidad de ocurrencia, la definición de la cartera que sirve de referente para el esquema de premios y castigos es una materia de la más alta importancia, ya que en la práctica constituye una suerte de cartera ancla para el administrador de los fondos de cesantía.

En este artículo el análisis es realizado con el apoyo de un modelo de selección dinámica de cartera. Por medio del estudio de dicho modelo es posible identificar los componentes de las estrategias de inversión óptimas, los que posteriormente se postula debiesen guiar la inversión de los fondos correspondientes a las CIC y al FCS. Adicionalmente, se realiza un ejercicio de simulación en base a los retornos históricos de distintas clases de activo para caracterizar la distribución de beneficios, medida por medio de las tasas de reemplazo y del valor del FCS que resultaría en caso de permitir inversión en renta variable. Los resultados obtenidos sugieren la diferenciación de las políticas de inversión que guían las inversiones de las CIC y del FCS y la inclusión de renta variable como instrumento elegible.

Bajo los supuestos adecuados, nuestros resultados son compatibles con los obtenidos por Walker (2008) para el caso del FCS. En particular, de nuestro modelo de selección de cartera se obtiene que cuando el valor presente de activos y pasivos del FCS es idéntico, la estrategia de inversión debiese estar dirigida exclusivamente a cubrir los pasivos. Sin embargo, nuestro modelo también considera situaciones adicionales. Por ejemplo, en caso que el flujo de aportes que recibe el FCS sea muy superior al de obligaciones [Bravo *et al.* (2007), Fajnzylber y Poblete (2008)], de nuestro modelo emerge naturalmente la conveniencia de aprovechar la existencia de potenciales premios por riesgo. Igual cosa ocurre en relación al grado de diferenciación de las estrategias de inversión de las CIC y del FCS, en donde encontramos que las estrategias de inversión de ambos debiesen ser hasta cierto punto opuestas; esto último, en la medida que los potenciales aportes de las CIC al FCS representen una parte significativa de las fuentes de fondos del FCS.

El artículo está organizado de la siguiente forma. La sección 2 presenta dos problemas de selección de cartera, uno asociado a los objetivos de inversión de las CIC y otro a los del FCS. A partir de estos modelos se establecen algunos resultados que surgen de las estrategias óptimas identificadas en cada caso. Posteriormente, la sección 3 analiza las distribuciones de las tasas de reemplazo y del valor del FCS que resultan de considerar posiciones en instrumentos de renta variable, tanto en las CIC como en el FCS, las que son construídas a partir de la información histórica del sistema de pensiones, utilizando información desagregada a nivel individual y un proceso generador de retornos con cambio de régimen. Las principales conclusiones se presentan en la sección 4. Para facilitar la lectura, todas las derivaciones algebraicas son remitidas al Apéndice al final del artículo.

## 2. ¿Qué nos dice la teoría?

En esta sección se estudian dos problemas de selección de cartera que persiguen capturar la problemática enfrentada por un trabajador representativo (problema de las CIC) y por un planificador central benévolo que debe hacer frente a los compromisos contraídos por el FCS (problema del FCS). Para tales efectos, el primer desafío corresponde a la identificación de los objetivos de inversión de cada fondo.

En el caso de las CIC, postulamos como objetivo de inversión la disminución de las fluctuaciones del ingreso del trabajador por medio del ahorro individual. Esto último, debido a que los fondos en las CIC constituyen el componente auto-financiado de los beneficios del SC, de manera que la estrategia de inversión adecuada a tales objetivos puede obtenerse por medio del estudio de un problema de ahorro-consumo intertemporal tradicional; Merton (1969, 1971), Samuelson (1969).

Por otra parte, en el caso del FCS el análisis debe considerar al menos dos propósitos. En primer lugar se cuenta el propósito de financiar las obligaciones contraídas, determinadas por la diferencia entre el monto del beneficio asegurado y la parte auto-financiada con los fondos en las CIC. Mientras que en segundo lugar se cuenta el propósito de invertir adecuadamente los potenciales superávits que puedan resultar de la diferencia entre aportes y pago de obligaciones. Al igual que para las CIC, ambas consideraciones pueden ser abordadas por medio del estudio de un problema de selección intertemporal de cartera que recoja ambos propósitos.

A continuación se analizan las características y determinantes de las correspondientes estrategias óptimas de inversión.

### 2.1. Política de inversión para las CIC

A continuación presentamos un problema de cartera que pretende capturar la problemática relevante para la inversión de las CIC. En particular, se plantea un problema de ahorro-consumo que considera la necesidad, por parte del trabajador representativo, de financiar un nivel de consumo de subsistencia. Dicho componente puede estar asociado a la canasta de consumo utilizada para calcular la línea de pobreza, o algún otro nivel de consumo bajo el cual el bienestar del individuo se pueda ver drásticamente reducido.<sup>3</sup>

Asimismo, utilizamos como punto de referencia una situación en donde la presencia de un mecanismo de financiamiento solidario como el provisto por el FCS está ausente. Esto tiene como objetivo evitar fenómenos de riesgo moral, ya que en caso de analizar

---

<sup>3</sup>Cabe hacer notar que la existencia de un consumo de subsistencia no es necesaria para resolver el problema de cartera, sin embargo, en nuestra opinión su presencia agrega consideraciones que pueden resultar relevantes para el encargado de política pública.

el problema del individuo en presencia del componente solidario señalado, la solución pasaría —necesariamente— por adoptar estrategias de inversión menos conservadoras a costa del seguro provisto por el FCS. En lugar de seguir dicha ruta optamos por estudiar un problema más instructivo; esto es, responder a la pregunta de cómo se debiesen invertir los fondos de las CIC, a partir de la forma en como invertiría sus ahorros un individuo interesado en evitar que su nivel de consumo caiga por debajo de un cierto nivel de subsistencia. Cabe señalar que este enfoque resulta apropiado, adicionalmente, por la presencia del grupo de trabajadores con contrato a plazo fijo, que no tiene actualmente acceso al beneficio del FCS y que representa una fracción importante del total de trabajadores afiliados al seguro, así como también por la existencia de trabajadores temporeros, o de trabajadores con contrato indefinido que no cumplen con los requisitos de elegibilidad.

En relación a las preferencias del trabajador representativo, ellas son representadas por medio de un índice de utilidad esperada de la forma

$$U(c) \triangleq \mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t - \bar{c}_t) dt \right], \quad 0 \leq T < \infty,$$

en donde  $\rho \in \mathbb{R}_+$  es un factor de descuento subjetivo,  $u(\cdot) : \mathbb{R}_{++} \mapsto \mathbb{R}$  es la función de utilidad instantánea de clase  $C^2(\mathbb{R})$ , estrictamente creciente y estrictamente cóncava, tal que  $u'(0) = \lim_{c \downarrow 0} u'(c) = \infty$  y  $u'(\infty) = \lim_{c \uparrow \infty} u'(c) = 0$ ,  $c_t \geq 0$  es el tasa de consumo que el individuo es capaz de financiar con los ingresos de que dispone, y  $\bar{c}_t \geq 0$  corresponde al consumo de subsistencia que el individuo debe financiar para evitar consumos con una utilidad instantánea asociada de  $-\infty$ ; esto es,  $u(x) = -\infty$ , si  $x < 0$ .

Para hacer el problema más realista supondremos adicionalmente que el individuo percibe un ingreso laboral aleatorio durante el horizonte de planeación ( $[0, T]$ ), por un monto igual a  $dE_t \geq 0$ , en donde  $dE_t = 0$  representa la materialización de un episodio de desempleo cuya duración es igualmente desconocida.

Bajo ciertos supuestos simplificadores (ver Apéndice) es posible obtener una expresión analítica de la estrategia de inversión óptima para un individuo con preferencias que exhiben aversión relativa al riesgo constante.<sup>4</sup> Para simplificar la notación consideramos un entorno en donde solo existen dos activos representativos: uno riesgoso y otro libre de riesgo.<sup>5</sup> Dicha estrategia está caracterizada por la siguiente expresión, con  $\pi_t^{CIC}$  y  $1 - \pi_t^{CIC}$  como la fracción del saldo de la CIC a ser invertida en el activo riesgo y en el

<sup>4</sup>En particular, es posible obtener una solución analítica cuando la incertidumbre es generada por un movimiento Browniano,  $W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ , y todos los parámetros son invariantes en el tiempo; para más detalles véase el Apéndice.

<sup>5</sup>Cabe hacer notar que el uso de solo dos activos —uno riesgoso y otro libre de riesgo— no implica pérdida de generalidad; Merton (1971).

activo libre de riesgo, respectivamente,

$$\pi_t^{CIC} = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} (1 - f_t^{\bar{c}} + f_t^e) + \frac{\sigma_{\bar{c}}}{\sigma} f_t^{\bar{c}} - \frac{\sigma_e}{\sigma} f_t^e - g_{1t}, \quad (1)$$

en donde  $\mu \in \mathbb{R}_{++}$  es el retorno esperado del activo riesgoso,  $r \in [0, \mu)$  es la tasa de interés instantánea,  $\gamma > 0$  es el coeficiente de aversión relativa al riesgo del individuo,  $(\sigma, \sigma_{\bar{c}}, \sigma_e) \in \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}^2$  es el vector de volatilidades del activo riesgoso, el consumo de subsistencia y el flujo de ingresos, respectivamente,  $(f_t^{\bar{c}}, f_t^e)$  corresponden a la fracción de las CIC que es representado por el valor presente del consumo de subsistencia y el ingreso laboral, respectivamente, mientras que el término  $g_{1t} \geq 0$  es una función relacionada con la materialización de los episodios de desempleo.

La estrategia óptima corresponde por tanto a la diferencia de dos cantidades: un promedio ponderado de tres componentes y un término que da cuenta de las consecuencias de la materialización de un evento de desempleo, que son cercanas a cero cuando ya sea la probabilidad o el impacto de dicho evento de baja envergadura.

La suma ponderada incluye un término de media-varianza (i.e., solución de Merton,  $(\mu - r)/\gamma\sigma^2$ ) y dos términos de cobertura, que dan cuenta de los movimientos entre el consumo de subsistencia y en ingreso laboral, en relación al activo riesgoso, respectivamente.<sup>6</sup> Cada uno de estos términos es multiplicado por un factor que representa la importancia relativa del valor presente del consumo de subsistencia y el ingreso laboral, en relación a la riqueza necesaria para financiar el plan de consumo óptimo.

La expresión en (1) ilustra las distintas fuerzas involucradas. A continuación destacamos algunas de las más importantes.

**Resultado 1** *Un individuo con una riqueza financiera apenas suficiente para financiar el consumo de subsistencia, y con un capital humano cercano a cero, invertirá en el activo riesgoso solo si la correlación entre ambos es mayor que cero.*

El Resultado 1 ilustra una de las dimensiones de interés para el encargado de política pública: la posición financiera del individuo. En el caso de un individuo cuyo saldo en la CIC es apenas suficiente para financiar el flujo correspondiente al consumo de subsistencia, y que además posea un muy bajo capital humano (i.e.,  $f_t^{\bar{c}} \approx 1$ ,  $f_t^e \approx 0$  y  $g_{1t} \approx 0$ , luego  $\pi_t^{CIC} \approx \sigma_{\bar{c}}/\sigma$ ), éste invertirá en el activo riesgoso solo si este último está positivamente correlacionado con el consumo a financiar (i.e.,  $\sigma_{\bar{c}}/\sigma > 0$ ). En particular, cuando la

<sup>6</sup>Si la dinámica de  $x$  es dictada por:  $dx_t/x_t = \mu_X dt + \sigma_X dW_t$ , se tiene que la covarianza entre  $dx_t/x_t$  y  $dW_t \sim \mathcal{N}(0, dt)$  es igual a  $\sigma_X dt$ , la varianza de  $dx_t/x_t$  es igual a  $\sigma_X^2 dt$ , mientras que la desviación estándar instantánea corresponde a  $|\sigma_X|$ . En el artículo utilizaremos el cociente  $\sigma_X/\sigma_Y$  para cuantificar variaciones entre  $x$  e  $y$ . Dicho cociente captura el signo de la covarianza y la magnitud relativa de variabilidad entre  $x$  e  $y$ .

evolución del consumo de subsistencia sigue una trayectoria determinística (i.e.,  $\sigma_{\bar{c}} = 0$ ) la estrategia óptima del individuo involucra invertir toda la riqueza en el activo libre de riesgo. Por el contrario, si existe una correlación positiva entre el consumo de subsistencia y el activo riesgoso, el individuo invertirá en este último como una forma de prevenir fluctuaciones indeseadas; esto es, que el consumo de subsistencia aumente cuando el saldo de la CIC disminuye.

**Resultado 2** *En relación al caso descrito en el Resultado 1, si la riqueza financiera es suficiente para financiar el consumo de subsistencia y la correlación entre este último y el activo riesgoso es positiva, el individuo invertirá más (menos) en el activo riesgoso si la solución de Merton es superior (inferior) a  $\sigma_{\bar{c}}/\sigma$ .*

El Resultado 2 se refiere al caso en que la posición financiera del individuo es menos restrictiva. En particular, cuando la riqueza financiera es suficiente para financiar el consumo de subsistencia (i.e.,  $0 < f_t^{\bar{c}} < 1$ ,  $f_t^e \approx 0$  y  $g_{1t} \approx 0$ , luego  $\pi_t^{CIC} \approx (1 - f_t^{\bar{c}})(\mu - r)/\gamma\sigma^2 + f_t^{\bar{c}}\sigma_{\bar{c}}/\sigma$ ) el individuo tomará en consideración un nuevo elemento: la inversión correspondiente a la solución de Merton (1969),  $(\mu - r)/\gamma\sigma^2$ . En tanto dicha solución sea mayor a  $\sigma_{\bar{c}}/\sigma$  una posición financiera menos restrictiva resultará en una mayor fracción de la riqueza destinada al activo riesgoso.<sup>7</sup>

**Resultado 3** *En relación al caso descrito en el Resultado 2, si (i) el capital humano es significativo, (ii) el valor presente de la riqueza se mantiene constante,<sup>8</sup> y (iii) no hay posibilidad de desempleo,<sup>9</sup> el individuo invertirá una mayor (resp. menor) cantidad en el activo riesgoso si  $\sigma_e/\sigma < (>)0$ .*

El Resultado 3 se refiere a las características del capital humano. Dado que la riqueza financiera puede ser negativa, ya que suponemos que el individuo puede endeudarse a cuenta de su capital humano, el resultado es fraseado en términos del monto invertido en el activo riesgoso, que en este caso es más informativo. Esto porque  $\pi^{CIC}$  puede ser negativo, pese a que la riqueza invertida en el activo riesgo no lo sea. El resultado también está condicionado a mantener la riqueza total constante, de manera de no alterar el plan de consumo óptimo. Bajo las condiciones señaladas, un mayor capital humano (i.e.,  $f_t^e > 0$ ) aumentará la cantidad invertida en el activo riesgoso. El resultado viene dado por la correlación entre el ingreso laboral y el activo riesgoso. Cuando ellos están correlacionados

<sup>7</sup>En relación al parámetro  $\gamma > 0$ , Gollier (2001) sugiere valores entre 0 y 4, los que resultan similares a estimaciones provenientes de información de mercado; Bliss y Panigirtzoglou (2004).

<sup>8</sup>Nótese que una mayor riqueza inicial incrementa el valor presente del consumo por encima del consumo de subsistencia. Para simplificar la estática comparativa podemos suponer que el incremento en el capital humano es perfectamente balanceado por una disminución en la riqueza inicial del individuo.

<sup>9</sup>En el modelo desarrollado en el Apéndice, este caso corresponde a  $\Psi(S_t) = 0$ .

de manera negativa, el activo riesgoso sirve la función de cubrir las potenciales fluctuaciones en el capital humano, i.e., evitar que tanto la riqueza financiera como el capital humano se reduzcan al mismo tiempo.<sup>10</sup>

**Resultado 4** *En relación al caso descrito en el Resultado 3, si la riqueza total del individuo se mantiene constante y la posibilidad de desempleo es positiva,<sup>11</sup> el individuo invertirá una menor cantidad en el activo riesgoso si la correlación entre el ingreso laboral y el activo riesgoso es negativa; en caso contrario el resultado es ambiguo.*

El Resultado 4 considera el efecto del desempleo en la tenencia del activo riesgoso. En el contexto del modelo desarrollado en el Apéndice, la presencia del desempleo tiene dos efectos. Por una parte, reduce la importancia relativa del capital humano, una consecuencia directa del hecho que algunas trayectorias del ingreso laboral presentarán valores iguales a cero en el evento de desempleo (asociado en el modelo con un bajo valor del activo riesgoso,  $\{S_t < \underline{S}\}$ ). Por otra parte, el desempleo motiva la aparición de un término de cobertura contra la probabilidad que se materialice un evento de desempleo ( $g_{1t} > 0$ ). Dicho término tiene signo negativo debido a que un aumento en la probabilidad de desempleo disminuye simultáneamente la riqueza financiera (por estar asociado a un bajo precio del activo riesgoso) y el valor del capital humano. Cuando la correlación entre el ingreso laboral y el activo riesgoso es negativa (i.e.,  $\sigma_e/\sigma < 0$ ), el activo riesgoso cumple el rol de cobertura. En dicho caso, la presencia de desempleo reduce esta necesidad, hecho que se potencia por el componente de cobertura contra la probabilidad de desempleo. Cuando esta correlación es positiva, el resultado es incierto ya que los efectos operan en sentidos inversos.

## 2.2. Política de inversión para el FCS

Analizados los determinantes de la política de inversión óptima de las CIC, a continuación pasamos a estudiar el problema de selección de cartera del FCS. Para esto último, postulamos un modelo que enfatiza la obligación que tiene el FCS de hacer frente a los compromisos contraídos. En particular, modelamos el flujo de egresos como la suma de dos componentes: uno idiosincrático, que puede estar asociado al desempleo en tiempos normales, y otro de carácter sistemático, relacionado a la ocurrencia de episodios de desempleo agregado de mayor envergadura y menos frecuentes. El flujo de egresos

<sup>10</sup>Nótese que un caso en que  $\sigma_e/\sigma \leq 0$  puede servir para justificar una inversión en renta variable que sea decreciente a medida que la edad del individuo aumenta, como es el caso en el sistema de pensiones chileno.

<sup>11</sup>Para efectos del modelo desarrollado en el Apéndice, esto corresponde a  $\Psi(S_t) > 0$ .

planteados corresponde a:

$$dG_t = b_t dt + 1_D(t)(B - f(X_t^*))^+ dt \geq 0,$$

en donde  $b \equiv \{b_t \geq 0; 0 \leq t \leq T\}$  representa el componente del flujo de egresos asociado al desempleo en tiempos normales, mientras que  $(B - f(X_t^*))^+$ , con  $x^+ \equiv \max(x, 0)$  y  $f(\cdot) : \Omega \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$  de clase  $C^1(\mathbb{R})$ , tal que  $f'(x) > 0$ , representa el desembolso asociado a la ocurrencia de un episodio de desempleo agregado, en donde  $1_D(t)$  denota la función indicadora que toma el valor 1 cuando ocurre un episodio de desempleo *agregado*. La función  $f(\cdot)$  representa por tanto la relación (creciente) que existe entre el saldo de la CIC del individuo representativo y el monto que sirve para cubrir, al menos en parte, el desembolso originado por el beneficio comprometido,  $B > 0$ .

Adicionalmente, para ser más realistas podemos considerar los aportes que recibe de manera periódica el FCS por medio de un flujo de aportes  $a \equiv \{a_t \geq 0; 0 \leq t \leq T\}$ .

Finalmente, a fin de considerar la adecuada inversión de los potenciales excesos entre aportes y obligaciones, podemos representar las preferencias del FCS por medio de un índice de utilidad esperada del tipo<sup>12</sup>

$$V(Y_T) = \mathbb{E}_0 \left[ e^{-\rho T} v(Y_T) \right]$$

en donde  $Y_T \geq 0$  es el valor del FCS al término del periodo de administración, mientras que  $v(\cdot)$  satisface propiedades similares a las de la función  $u(\cdot)$ .

Bajo supuestos simplificadores similares a los empleados en la sección anterior (ver Apéndice), la solución del problema de cartera para un inversionista con preferencias que exhiben aversión relativa al riesgo constante está dada por la siguiente expresión, con  $\pi_t^{FCS}$  como la fracción del FCS invertida en el activo riesgoso:

$$\pi_t^{FCS} = \frac{\mu - r}{R\sigma^2} f_t^Y + \frac{\sigma_b}{\sigma} f_t^b - \left( \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} + \frac{\sigma_c}{\sigma} - \frac{\sigma_e}{\sigma} \right) f_t^M - \frac{\sigma_a}{\sigma} f_t^a - g_{2t} \quad (2)$$

en donde  $\sigma_b$  y  $\sigma_a$  corresponden a las volatilidades asociadas al flujo de beneficios en “tiempos normales” y a los aportes, respectivamente,  $R > 0$  es el coeficiente de aversión relativa al riesgo asociado a las preferencias por excesos del FCS,  $(f_t^b, f_t^a, f_t^M, f_t^T)$  son las fracciones del FCS correspondientes al valor presente del flujo de beneficios en tiempos normales, el flujo de aportes, el valor de los ahorros en las CIC, y el valor terminal del FCS, respectivamente, mientras que  $g_{2t} \geq 0$  es una función relacionada a la materialización de los episodios de desempleo agregado.

<sup>12</sup>Nótese que esta función objetivo puede ser asociada a la de un planificador central benevolente, pero no a la del administrador del FCS quien se encuentra sujeto a un esquema de premios y castigos que afecta sus decisiones de inversión; Castañeda (2006).

De manera similar al caso anterior, el plan de inversión óptimo para el FCS corresponde a la diferencia entre dos cantidades: una suma ponderada de cuatro términos y un componente que da cuenta de los cambios en la probabilidad de ocurrencia de un evento de desempleo agregado. La suma ponderada incluye un componente de media-varianza y tres componentes de cobertura asociados a los movimientos de los beneficios idiosincráticos, la parte financiada con las CIC y el flujo de contribuciones, en relación a los movimientos en el activo riesgoso, respectivamente. Como en el caso anterior, cada término es acompañado por un factor que representa la relevancia de cada motivo de cobertura, en términos de su valor presente, respecto de la riqueza financiera del FCS.

La expresión en (2) ilustra las distintas fuerzas en juego. A continuación destacamos algunas de las más importantes.

**Resultado 5** *Mientras más solvente sea el FCS en términos actuariales, la estrategia de inversión del FCS se aproximará a la solución de Merton,  $(\mu - r) / R\sigma^2$ .*

El Resultado 5 considera una situación en línea con los pronósticos más recientes, esto es, la presencia de un FCS crecientemente solvente; Bravo *et al.* (2006), Fajnzylber y Poblete (2008). Similar a lo que ocurre con las CIC, la mayor solvencia del FCS se traduce en una mayor preponderancia del ponderador  $f_t^Y$ .

**Observación 1** *Nótese que  $\pi^{FCS}$  incluye algunos de los componentes de  $\pi^{CIC}$  (i.e.,  $(\mu - r) / \gamma\sigma^2$ ,  $\sigma_{\bar{c}}/\sigma$ ,  $\sigma_e/\sigma$ ). Esto se debe a que una parte de los beneficios del componente sistemático es financiado con las CIC.*

Debido a que el ahorro de las CIC es una suerte de amortiguador en caso de un evento de desempleo agregado, la inversión realizada por las CIC en el activo riesgoso actúa como sustituto a la inversión que realiza el FCS. Este hecho es similar a lo que ocurre con las CIC cuando el ingreso laboral del individuo está positivamente correlacionado con el activo riesgoso, caso en el cual el individuo posee una posición *implícita* en este último, por lo que su estrategia óptima involucra una reducción en dicho activo.<sup>13</sup>

**Resultado 6** *Basta que  $f_t^b$ ,  $f_t^M$  o  $f_t^a$  sean distintos de cero para que la cartera de inversión óptima del FCS no sea eficiente en el sentido de media varianza estático, pese a que  $R = 1$ .*

---

<sup>13</sup>Nótese que la ausencia del beneficio a pagar en caso de desempleo agregado ( $B > 0$ ) se debe a que dicho componente corresponde a un monto enteramente determinístico, por lo que resulta óptimo invertir en el activo libre de riesgo para cubrir sus fluctuaciones. Si  $B$  se viera influenciado por la incertidumbre del entorno, la estrategia de inversión óptima incluiría los componentes de cobertura correspondientes.

Este resultado contraviene la creencia popular de que una cartera bien administrada debe ser eficiente en el sentido de media-varianza descrito por Markowitz (1952). Esto se debe a que el análisis llevado a cabo incluye consideraciones adicionales. En particular, la estrategia de inversión óptima identificada en (2) considera tanto activos (estructura de aportes) como pasivos (estructura de obligaciones), de manera que sirve de base para una política de inversión de activos basada en las características de los pasivos del FCS, a diferencia del modelo de media-varianza.

### **2.3. Análisis a la luz de la teoría**

De la caracterización de las estrategias de inversión óptimas realizada en las secciones precedentes es posible evaluar la conveniencia de diferenciar la estrategia de inversión de las CIC de la del FCS. Por una parte, la estrategia de inversión óptima de las CIC involucra: (1) invertir sólo en activos que cubran las fluctuaciones en el consumo de subsistencia si el valor presente de éste es muy importante, y al mismo tiempo, el capital humano es poco importante; y (2) en la medida que la magnitud del capital humano sea más relevante se debiese cubrir las fluctuaciones en éste y aumentar la inversión en renta variable.

Por su parte, para la estrategia de inversión óptima del FCS se tiene que en la medida que: (1) el valor presente de los pasivos es inferior al de los activos se debería aprovechar el premio por riesgo; (2) el valor presente de la obligación asociada a un evento de desempleo agregado sea importante se debería invertir en renta fija; (3) el valor presente de las obligaciones periódicas sea importante se debería invertir en activos similares a los pasivos periódicos; (4) el aporte de las CIC al FCS sea importante, se debería deshacer la inversión hecha por las CIC en renta variable; y el valor presente del flujo de aportes sea importante se debería invertir en activos que se comporten de manera opuesta a ellos.

Del conjunto de sugerencias queda en evidencia lo disímiles que podrían llegar a ser las estrategias óptimas para cada fondo. En particular, si el consumo de subsistencia es relativamente importante y básicamente predecible, y el valor de los pasivos del FCS es inferior al de los activos, es perfectamente posible que las estrategias de inversión difieran en forma significativa. Adicionalmente, de las expresiones en (1) y (2) se tiene que las estrategias de las CIC y el FCS inversión presentan un cierto grado de antagonismo en virtud del aporte que realizan las CIC al FCS. En este sentido, los resultados sugieren que las políticas de inversión óptimas de ambos fondos se deberían comportar de manera disímil hasta cierto punto. Adicionalmente, es esperable que los flujos del FCS posean un mayor componente sistémico, mientras que en las CIC el componente idiosincrático debiese ser predominante. En conclusión, parecieran existir buenas razones para favorecer

la adopción de políticas de inversión diferenciadas entre ambos fondos.

El siguiente paso en el análisis correspondería a determinar la cartera óptima de las CIC y el FCS en base a estimadores de los parámetros del modelo. Esta alternativa tiene sin embargo una limitación importante, cual es que algunos de los supuestos empleados para derivar los resultados presentados en la sección anterior resultan demasiado gruesos (e.g., el signo y magnitud de las correlaciones entre los diversas clases de activo se supone constante en el tiempo). Motivados por esta última observación la sección siguiente explora la evidencia disponible en relación a la conveniencia de que tanto las CIC como el FCS inviertan en renta variable.

### **3. ¿Qué nos dice la evidencia?**

Con el propósito de observar en los hechos la conveniencia de incluir o no instrumentos de renta variable dentro del conjunto de instrumentos elegibles para los Fondos de Cesantía, esta sección muestra los resultados de un ejercicio de simulación que considera distintas estrategias de inversión tanto para las CIC como para el FCS.

#### **3.1. Descripción del ejercicio**

Para la realización del ejercicio se utilizó el modelo de micro-datos desarrollado para evaluar el impacto de distintas regulaciones en el funcionamiento del Seguro de Cesantía; Fajnzylber y Poblete (2008). Dicho modelo utiliza las historias previsionales administrativas de una muestra representativa de afiliados al Sistema de Pensiones del periodo 1988-2002. A partir de estas historias, se construyó la evolución hipotética de aportes y beneficios del Seguro de Cesantía, como si éste se hubiese creado en Enero 1988. Los registros disponibles permiten re-crear el Seguro de Cesantía hasta el año 2002. Utilizando estas historias se imputó la afiliación de los trabajadores al Seguro al momento que estos se cambiaron de empleador o cotizaron por primera vez. A su vez, los períodos en que no se observó cotizaciones fueron asimilados a episodios de desempleo. Posteriormente, para cada uno de dichos periodos se determinó si la persona era elegible para recibir beneficios de la CIC o del FCS, en cuyo caso se imputó la probabilidad de solicitar beneficios, previamente obtenida de los datos administrativos y calculada en función de las características del trabajador y del tipo de relación laboral. A partir de esta re-creación se estimaron las tasas de reemplazo de los individuos que solicitaron beneficio en el periodo re-creado y el saldo acumulado en el FCS.

A partir de estas historias se obtuvieron los indicadores señalados para 100 posibles realizaciones de los retornos obtenidos por las CIC y el FCS, bajo cuatro estrategias pa-

sivas de inversión. En este sentido, los resultados que a continuación se presentan corresponden a una cota inferior de los beneficios potenciales de incluir renta variable en las carteras una inversión de los Fondos de Cesantía.

Las estrategias de inversión en cuestión están compuestas por tres tipos de activos: Renta Fija Nacional (RFN) de corto plazo (CP) y mediano plazo (MP), y Renta Variable (RV). La siguiente tabla describe los porcentajes considerados en cada una de ellas.

### **Estrategias de Inversión**

|                   | CIC               | FCS                        |
|-------------------|-------------------|----------------------------|
| Estrategia 1 (E1) | 100 % RFN CP      | 50 % RFN CP<br>50 % RFN MP |
| Estrategia 2      | 95 % E1 + 5 % RV  | 95 % E1 + 5 % RV           |
| Estrategia 3      | 90 % E1 + 10 % RV | 90 % E1 + 10 % RV          |

En la simulación de los retornos de cada una de las tres estrategias consideradas se utilizaron los retornos históricos de índices representativos de instrumentos de renta variable (el índice accionario nacional IPSA y el índice de renta variable extranjero MSCI World, en igual proporción) y renta fija (índices LVA de corto y mediano plazo). Los retornos utilizados corresponden a los del periodo 2001-2006.<sup>14</sup>

Por tratarse de estrategias de inversión pasivas es posible obtener el retorno histórico asociado a cada estrategia. A partir de dichos retornos, se calibraron distribuciones normales para cada estrategia, las que fueron posteriormente utilizadas en las simulaciones.

Para capturar la correlación existente entre las características del ciclo económico y los retornos de los activos se calibraron, para cada estrategia y fondo, distribuciones diferenciadas según el nivel de actividad económica, distinguiéndose periodos de alta y baja actividad.<sup>15</sup>

A partir de las trayectorias simuladas para las CIC y el FCS, se determinó la elegibilidad de los individuos para acceder a los beneficios en cada momento del tiempo. En cada episodio de desempleo se procedió a imputar la probabilidad de solicitar dichos beneficios y posteriormente se calcularon los saldos existentes en las CIC y en el FCS.

<sup>14</sup>El periodo fue seleccionado por la disponibilidad de los retornos de los índices de renta fija de LVA Índices.

<sup>15</sup>Los periodos fueron seleccionados en base al siguiente criterio. Se ajustó la serie de cotizantes del periodo 1996-2006 con una tendencia lineal, removiendo el componente de estacionalidad. A partir de la serie original y la serie filtrada se identificaron los siguientes periodos de alta y baja actividad: Baja Actividad: 01.08.1999-31.12.2005 y Alta Actividad: 01.01.1996-01.01.1999 y 01.01.2006-31.12.2006. Para los retornos, los periodos de actividad se restringieron al periodo 01.08.2001-31.12.2006 debido a existencia de un quiebre estructural en los índices de renta fija en Julio 2001.

### 3.2. Resultados

El ejercicio descrito entrega 100 posibles realizaciones para cada individuo incluido en la muestra y cada combinación de estrategias de inversión de las CIC y del FCS. Para evaluar el desempeño relativo de las distintas estrategias consideradas, se calcularon 2 indicadores:

- Tasa de Reemplazo Potencial: corresponde al cociente entre el saldo en la CIC y la renta imponible del individuo durante los últimos meses cotizados. Este indicador fue calculado para los individuos con derecho a la CIC o FCS en un mes determinado.<sup>16</sup>
- Valor del FCS.

El primer indicador mide la *calidad del beneficio* que recibiría un trabajador con derecho a beneficios financiados por la CIC, en caso que éste quede desempleado en un mes determinado. De acuerdo a la legislación vigente, el beneficio financiado por la CIC corresponde a la totalidad del saldo acumulado en la cuenta individual, repartidos en los distintos pagos a que tiene derecho.<sup>17</sup> Por su parte, el segundo indicador mide el *grado de solvencia* del sistema para hacer frente a pagos futuros por parte de afiliados con derecho a recibir beneficios de parte del FCS.

Dado que el foco de atención del ejercicio consiste en comparar las distintas estrategias de inversión, para cada individuo se calculó la diferencia porcentual entre las estrategias 2 y 3, en relación a la Estrategia 1. Asimismo, para obtener un indicador representativo para toda la población se consideró la distribución de la realización correspondiente al individuo mediano en cada trayectoria.

En base al procedimiento descrito se obtuvieron 100 realizaciones de la diferencia porcentual entre las estrategias 2 y 3, que consideran respectivamente un 5 % y 10 % de inversión en renta variable, correspondientes al individuo mediano de cada trayectoria.

El siguiente gráfico muestra la evolución en el tiempo de la media y los percentiles 5 % y 95 % de las diferencias porcentuales antes señaladas. Diferencias porcentuales cercanas a cero corresponden a estrategias con un desempeño similar a la Estrategia 1, mientras que valores positivos implican un desempeño superior a dicha estrategia.

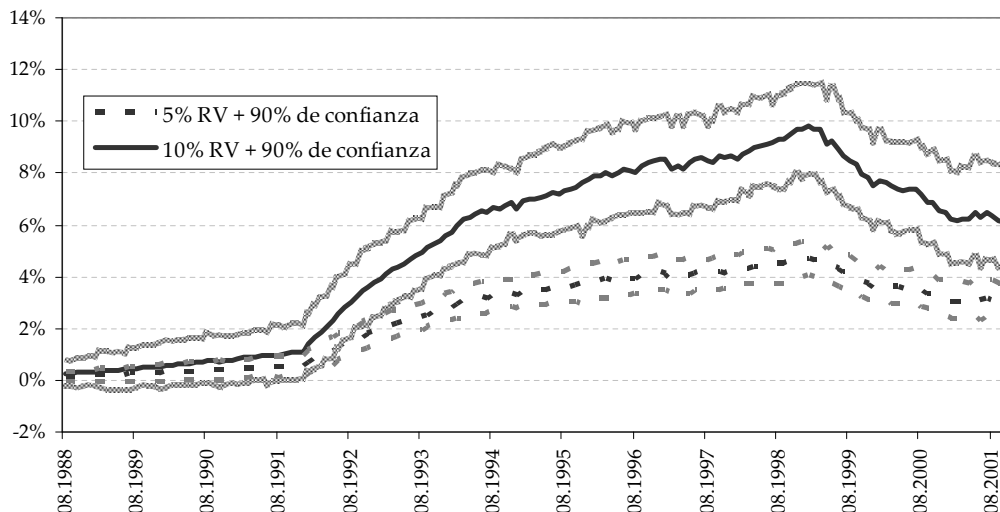
---

<sup>16</sup>Para determinar la elegibilidad de cada individuo a recibir beneficios, se utilizaron los criterios de meses cotizados desde el momento de la afiliación, o desde el último beneficio, y en el caso del FCS, se verificó que el saldo acumulado en la CIC no fuera superior a al saldo requerido para financiar los 5 pagos máximos que establece la regulación. Por su parte, los criterios relacionados con las causales de término de la relación laboral necesarias para acceder a beneficios están implícitas en las probabilidades imputadas de solicitar dichos beneficios.

<sup>17</sup>Si un afiliado presenta 18 cotizaciones mensuales o menos desde la afiliación o desde el último beneficio, tiene derecho a un solo pago; entre 19 y 30 cotizaciones, 2 pagos, etc.

### Tasa de Reemplazo Potencial relativa a estrategia de "Solo Renta Fija"

Individuos con derecho a CIC o FCS del cuantil 50% de la población



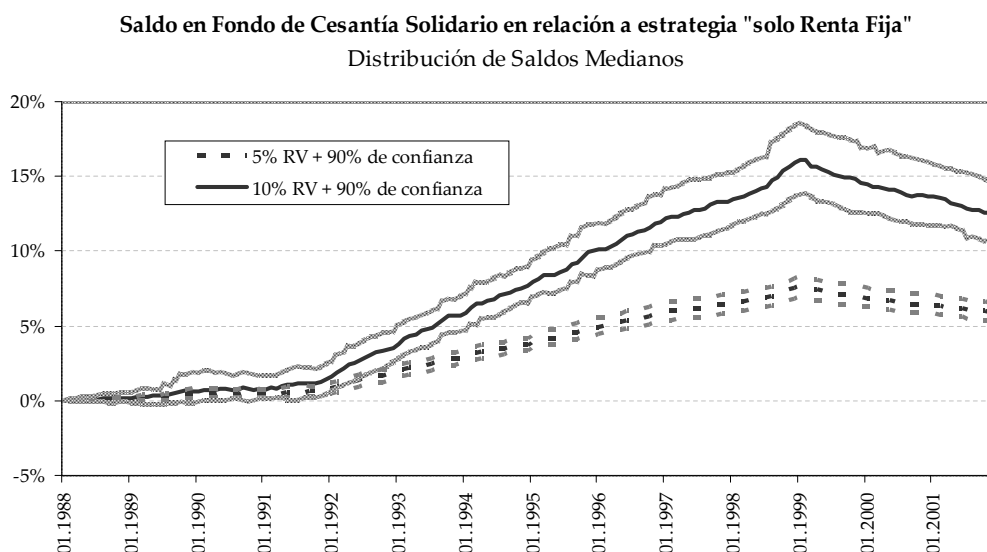
Como se aprecia en el gráfico, durante los primeros años de funcionamiento del seguro los saldos acumulados en las CIC son poco significativos, por lo que las estrategias de inversión que incluyen renta variable, aunque ofrecen en promedio tasas de reemplazo superiores, presentan al mismo tiempo una mayor dispersión de resultados, observándose en muchos casos un desempeño inferior a la estrategia basada exclusivamente en instrumentos de renta fija.

A partir de 1992 —momento en que se obtienen los retornos simulados a partir de la distribución asociada al período de bajo desempleo— la inclusión de renta variable tiene un efecto significativo en términos de los fondos acumulados en las CIC, pasando a dominar a la Estrategia 1. Nótese de hecho que las distribuciones contenidas entre los percentiles 5 % y 95 % para las estrategias 2 y 3 se encuentran íntegramente por encima de cero.

A partir de 1999 —momento a partir del cual se utilizan nuevamente los retornos provenientes de la distribución calibrada de alto desempleo— se observa una fuerte caída y un aumento en la dispersión de los indicadores. Debido a la significativa ventaja acumulada hasta ese momento, las tasas de reemplazo asociadas a las estrategias 2 y 3 siguen siendo completamente dominantes.

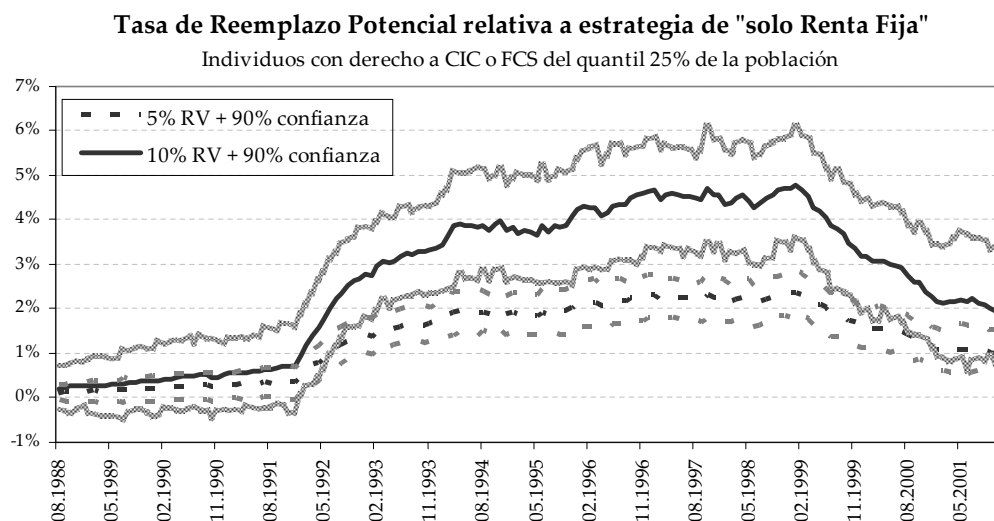
El siguiente gráfico muestra la evolución del FCS. Las conclusiones son muy similares al caso anterior: cuando el FCS es relativamente pequeño, los mayores retornos promedio asociados a los instrumentos de renta variable se contraponen a la mayor volatilidad de dichos instrumentos, pero a medida que el valor del fondo aumenta, la estrategias con mayor inversión en acciones domina ampliamente la estrategia pasiva de solo renta fija.

En los períodos recesivos, sin embargo, dicha brecha se reduce considerablemente.

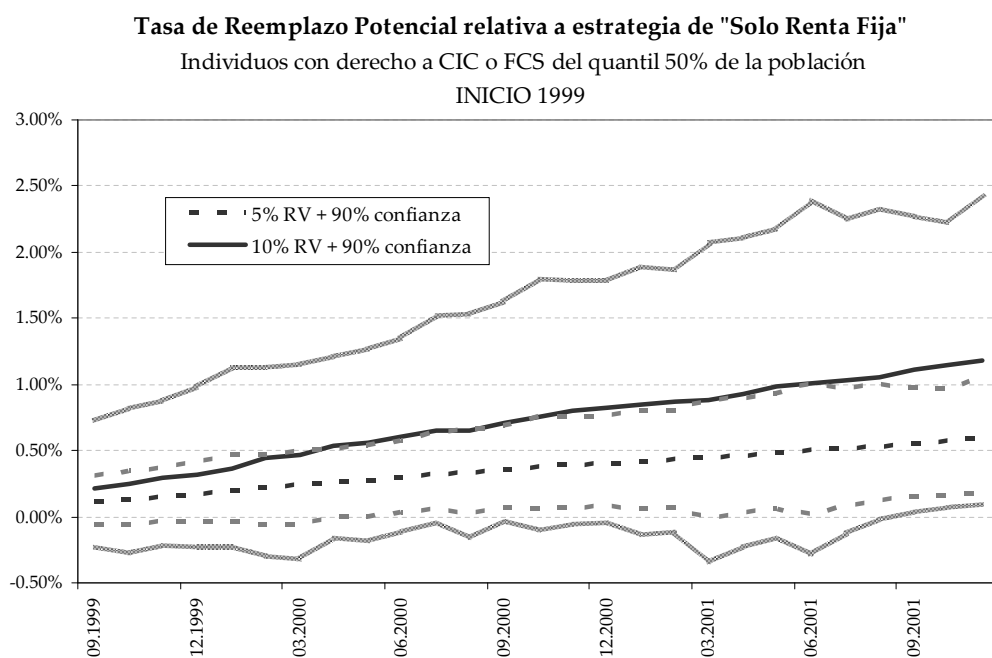


### 3.3. Robustez de los resultados

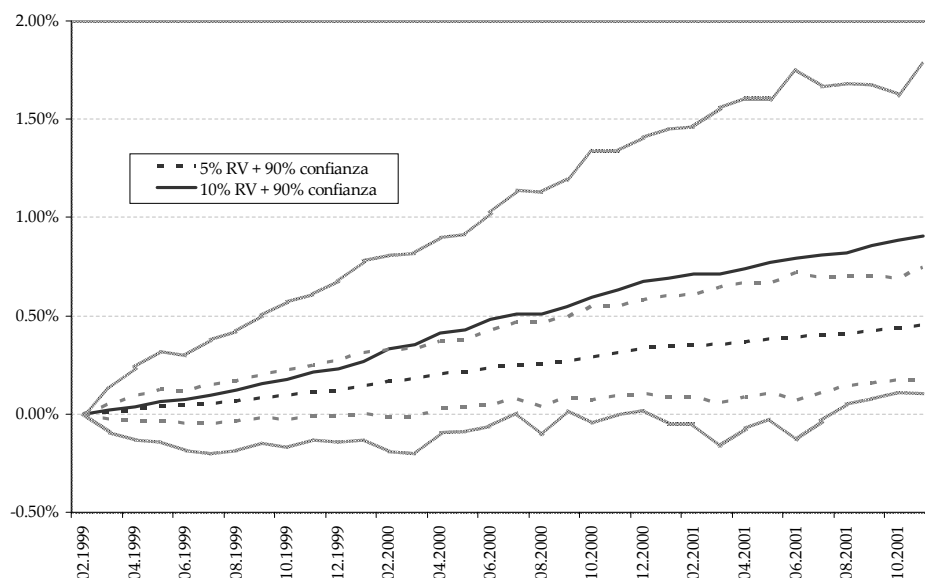
A continuación se muestra el resultado de 2 ejercicios destinados a verificar la robustez de los resultados mostrados previamente. El primero de ellos explora los efectos sobre las tasas de reemplazo potenciales que resultan cuando el foco de atención se traslada al individuo ubicado en el percentil 25 % de la población, en lugar del individuo mediano. Del gráfico se puede apreciar que si bien los beneficios disminuyen y la dominancia de la Estrategia 3 es menos pronunciada, las conclusiones cualitativas persisten.



Por su parte el segundo ejercicio ilustra los efectos de enfrentar un periodo de baja actividad económica al comienzo del sistema. Al igual que en el caso anterior, los gráficos siguientes muestran que los efectos tanto sobre las tasas de reemplazo potenciales, como sobre la evolución del FCS (comparados a escalas equivalentes) mantienen las conclusiones calitativas expuestas previamente.



Saldo en Fondo de Cesantía Solidario en relación a estrategia "solo Renta Fija"  
Distribución de Saldos Medianos  
INICIO FEBRERO 1999



## 4. Conclusiones

En este artículo se abordaron las consideraciones relativas a los lineamientos que debiesen guiar la inversión de los Fondos de Cesantía. Los modelos de selección de cartera considerados sugieren que la política de inversión de los ahorros correspondientes a las CIC debiese tomar en consideración, primero, las características del consumo de subsistencia del individuo que sea el foco de la política pública. En la medida que dicho componente sea sustancial, la política de inversión óptima de las CIC es aquella que cubre al individuo frente a las posibles fluctuaciones en este último. Como corolario se tiene que si el consumo de subsistencia es primordialmente determinístico y el capital humano es poco relevante, la política de inversión de las CIC debiese estar dirigida hacia instrumentos de renta fija. Solo en caso contrario, o si existieran holguras importantes para financiar el consumo de subsistencia, podría ser aconsejable que los fondos de las CIC fuesen invertidos en renta variable.

En relación a la política de inversión del FCS, los resultados sugieren que éste debiese invertir tomando en cuenta las características de sus activos y pasivos. En particular, como regla general el FCS debiese invertir en activos que se comporten de manera similar a sus pasivos, así como aquellos que se comportan de manera antagónica a sus activos (e.g.,

flujo de aportes y saldo de las CIC).

El análisis realizado también muestra la existencia de una suerte de sustitución de las inversiones realizadas por las CIC y el FCS, esto último, por ser los fondos de las CIC un aporte contingente al FCS.

Para efectos de evaluar en los hechos la conveniencia de autorizar instrumentos de renta variable, dentro del espectro de instrumentos elegibles para los Fondos de Cesantía, se realizó un ejercicio de simulación. Los resultados del mismo sugieren que esta podría ser una posibilidad atractiva. No obstante lo anterior, cabe enfatizar que esto no significa que los ahorros de las CIC o el FCS deban invertirse *necesariamente* en renta variable, sino más bien que sería conveniente que el administrador esté capacitado para hacerlo si la situación así lo amerita. Al respecto, debe tenerse presente que es perfectamente posible que los resultados de dominancia encontrados en la sección 3 se vean revertidos al considerarse un periodo distinto de 2001-2006 para caracterizar los retornos. El punto central es, en consecuencia, que el administrador de los fondos sea capaz de rebalancear la cartera en función de las condiciones de mercado imperantes.

Los resultados obtenidos también tienen implicancias a la hora de evaluar potenciales carteras referenciales. En particular, sería deseable que las carteras referenciales recogieran los fundamentos contenidos en las expresiones que describen las estrategias de inversión óptimas para las CIC y para el FCS, ya que es sabido que la estrategia de inversión de la cartera de referencia es un componente importantísimo de la estrategia de inversión seleccionada por el administrador de fondos.

## A. Apéndice

En este apéndice se presentan los modelos de selección de cartera considerados en el artículo.

### A.1. Política de inversión de las CIC

Para el caso de las CIC, se consideró el siguiente problema de control:

$$\max_{(c,\pi) \in \mathcal{A}^{c,\pi}(x)} \mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T e^{-\rho t} u(c_t - \bar{c}_t) dt \right],$$

en donde  $\bar{c} \equiv \{\bar{c}_t \geq 0; 0 \leq t \leq T\}$  representa la secuencia de consumo de subsistencia,  $(c, \pi)$  es un plan de consumo-inversión admisible, y el conjunto de planes admisibles

$\mathcal{A}^{c,\pi}(x)$  está dado por el siguiente conjunto:

$$\mathcal{A}^{c,\pi}(x) \triangleq \left\{ (c, \pi) : \begin{cases} \int_0^T c_t dt < \infty; & \int_0^T \pi_t^2 dt < \infty; \\ dX_t^{c,\pi} = [1 - \pi_t] X_t^{c,\pi} r dt + X_t^{c,\pi} \pi_t [dS_t/S_t + \delta dt] \\ \quad - (c_t - 1_E(t) e_t) dt \\ c_t \geq 0; & X_0 = x \geq 0; & \mathbb{E}_t \left[ X_t^{c,\pi} + \int_t^T \xi_{t,s} 1_E(s) e_s ds \right] \geq 0. \end{cases} \right\}$$

en donde  $X_t^{c,\pi}$  representa la riqueza financiera del individuo, cuya evolución está dada por el porcentaje invertido en el activo libre de riesgo,  $1 - \pi_t$ , que renta  $r > 0$  entre  $t$  y  $t + dt$ , y el porcentaje invertido en el activo riesgoso,  $\pi_t$ , cuyo precio es denotado por  $S$ , y que renta la ganancia de capital ( $dS_t/S_t$ ) y un dividendo de  $\delta > 0$ . La dinámica del activo riesgoso es modelada como un proceso Browniano geométrico (PBG),  $dS_t/S_t + \delta dt = \mu dt + \sigma dW_t$ , con  $\mu > r \geq 0$  y  $\sigma > 0$ .

El ingreso laboral del individuo corresponde a  $1_E(t) \cdot e_t$ , en donde  $1_E(t)$  es una función indicadora que toma el valor 1 cuando  $E \in \mathcal{F}_t$ , en donde  $E$  representa los eventos de empleo, mientras que  $e_t \geq 0$  denota el ingreso laboral, cuya dinámica evoluciona de acuerdo a  $de_t/e_t = \mu_e dt + \sigma_e dW_t$ , con  $\mu_e \geq 0$  y  $\sigma_e \in \mathbb{R}$ . Para modelar la ocurrencia de episodios de desempleo se definió la función indicadora en función del precio del activo riesgoso:<sup>18</sup>

$$1_E(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \leq \underline{S} \\ 1 & \text{si } S_t > \underline{S} \end{cases}.$$

La admisibilidad del par  $(c, \pi)$  está adicionalmente condicionada a supuestos técnicos [integrabilidad, condición de Novikov y ausencia de oportunidades de arbitraje; Karatzas y Shreve (1998, §3)]. Al respecto, cabe destacar la condición que garantiza la ausencia de oportunidades de arbitraje. Ella está dada por:

$$\mathbb{E}_t \left[ X_t^{c,\pi} + \int_t^T \xi_{t,s} 1_E(s) e_s ds \right] \geq 0$$

en donde  $\xi_{t,s} = \exp \left( -r(s-t) - \frac{1}{2}\theta^2(s-t) - \theta(W_s - W_t) \right)$  es el factor de descuento estocástico, o precio de Arrow-Debreu, que es compatible con la ausencia de oportunidades de arbitraje, y  $\theta = (\mu - r)/\sigma < \infty$  es el precio de mercado por riesgo, con  $(\mu, \sigma)$  como el retorno esperado y la volatilidad del activo riesgoso, respectivamente. La condición establece que la riqueza financiera del individuo no podrá ser negativa por un monto superior al valor presente del flujo de ingresos (i.e., capital humano).

Para el conjunto de planes  $(c, \pi) \in \mathcal{A}^{c,\pi}(x)$ , es posible mostrar que la solución al problema de control está dado por [véase, e.g., Detemple *et al.* (2005)]:

$$c_t^* = I(y \xi_t e^{\rho t}) + \bar{c}_t \quad \text{y} \quad \pi_t^* = \mathcal{D}_t(X_t^*)/X_t^* \sigma \quad (\text{A.1})$$

<sup>18</sup>La idea detrás de esta opción es la de suponer que el trabajador se desempeña en una empresa cuyo destino depende del valor bursátil de sus acciones.

en donde  $I(\cdot) \equiv u'^{-1}(\cdot)$  es la función inversa de la utilidad marginal del consumo, mientras que  $y > 0$  es la única solución a la ecuación

$$\mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T \xi_{t,s} (c_s(y \xi_s e^{\rho t}) - 1_E(s) e_s) ds \right] = X_0,$$

que tiene solución, bajo el supuesto que el valor presente de la riqueza del individuo es suficiente para financiar el consumo de subsistencia,

$$\mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T \xi_{t,s} (\bar{c}_s - 1_E(s) e_s) ds \right] - X_0 \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

ya que  $I(\cdot)$  es una función estrictamente decreciente con  $\lim_{y \rightarrow 0} I(y) = +\infty$  y  $\lim_{y \rightarrow \infty} I(y) = 0$ , mientras que el operador  $\mathcal{D}_t(\cdot)$  corresponde a la derivada de Malliavin,<sup>19</sup> y  $X_t^*$  corresponde a la riqueza óptima, esto es,

$$X_t^* = \mathbb{E}_t \left[ \int_t^T \xi_{t,s} (c_s^* - 1_E(s) e_s) ds \right].$$

**Observación 2** *Nótese que el plan de consumo está acotado por abajo por  $\bar{c}_t$ . Esto es, en la medida que el problema tenga solución (i.e., que sea posible financiar el consumo de subsistencia, véase la ecuación (A.2)), el individuo se encargará de no consumir menos de dicha cantidad.*

La derivación del plan de inversión  $\pi_t^*$  requiere determinar primero la expresión para  $X_t^*$ . En este caso tenemos que (con  $I(y) = y^{-1/\gamma}$  ya que  $u(c) = c^{1-\gamma}/(1-\gamma)$ ) suponiendo

---

<sup>19</sup>La derivada de Malliavin es una generalización de la noción de derivada tradicional que extiende el concepto a funciones que dependen de las trayectorias del movimiento Browniano,  $W$ . De la misma forma en que la derivada ordinaria mide el cambio local en la función, frente a un cambio local en la variable subyacente, la derivada de Malliavin mide el cambio en la función (que depende de la trayectoria de  $W$ ) implicado por un pequeño cambio en la trayectoria de  $W$ . El lector interesado en referido a Detemple *et al.* (2005) para una breve introducción a este operador, y a Nualart (2006) para un tratamiento exhaustivo.

que  $d\bar{c}_t/\bar{c}_t = \mu_{\bar{c}}dt + \sigma_{\bar{c}}dW_t$ , con  $\mu_{\bar{c}} \geq 0$  y  $\sigma_{\bar{c}} \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned}
X_t^* &= \mathbb{E}_t \left[ \int_t^T \zeta_{t,s} (I(y\zeta_s e^{\rho t}) + \bar{c}_s - 1_E(s)e_s) ds \right] \\
&= I(y\zeta_t e^{\rho t}) \mathbb{E} \left[ \int_t^T e^{-(1/\gamma)(r+\theta^2/2)(s-t) - \theta/\gamma(W_s - W_t)} ds \right] \\
&\quad + \bar{c}_t \mathbb{E} \left[ \int_t^T \left( e^{(\mu_{\bar{c}} - \sigma_{\bar{c}}^2/2 - r - \theta^2/2)(s-t) + (\sigma_{\bar{c}} - \theta)(W_s - W_t)} \right) ds \right] \\
&\quad - e_t \mathbb{E} \left[ \int_t^T 1_E(s) \left( e^{(\mu_e - \sigma_e^2/2 - r - \theta^2/2)(s-t) + (\sigma_e - \theta)(W_s - W_t)} \right) ds \right] \\
&= I(y^* \zeta_t e^{\rho t}) \frac{e^{(\theta^2/2\gamma^2 - r/\gamma - \theta^2/2\gamma)(T-t)} - 1}{\theta^2/2\gamma^2 - r/\gamma - \theta^2/2\gamma} + \bar{c}_t \frac{e^{(\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta)(T-t)} - 1}{\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta} \\
&\quad - e_t \left[ \frac{e^{(\mu_e - r - \sigma_e\theta)(T-t)} - 1}{\mu_e - r - \sigma_e\theta} - \Psi(S_t) \right],
\end{aligned}$$

mientras que

$$\Psi(S_t) = \int_t^T \left( e^{(\mu_e - r - \sigma_e\theta)(s-t)} \Phi(\underline{x}(S_t, s-t) + (\sigma_e - \theta)\sqrt{s-t}) \right) ds,$$

$\underline{x}(S_t, s-t) \equiv (\ln(\underline{S}/S_t) - (\mu - \sigma^2/2)(s-t))/\sigma$  y  $\Phi(\cdot)$  como la función de densidad acumulada de una variable normal estándar. Por su parte, para el numerador de la expresión de la derecha en (A.1) tenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_t(X_t^*) &= \frac{\theta}{\gamma\sigma} I(y\zeta_t e^{\rho t}) \frac{e^{(\theta^2/2\gamma^2 - r/\gamma - \theta^2/2\gamma)(T-t)} - 1}{\theta^2/2\gamma^2 - r/\gamma - \theta^2/2\gamma} \\
&\quad + \sigma_{\bar{c}} \bar{c}_t \frac{e^{(\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta)(T-t)} - 1}{\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta} \\
&\quad - \sigma_e e_t \left[ \frac{e^{(\mu_e - r - \sigma_e\theta)(T-t)} - 1}{\mu_e - r - \sigma_e\theta} - \Psi(S_t) \right] \\
&\quad - e_t \Psi'(S_t) \sigma
\end{aligned}$$

de donde se obtiene (para  $X_t^* \neq 0$ ):

$$\pi_t^{CIC} = \frac{\mu - r}{\gamma\sigma^2} \{1 - f_t^{\bar{c}} + f_t^e\} + \frac{\sigma_{\bar{c}}}{\sigma} f_t^{\bar{c}} - \frac{\sigma_e}{\sigma} f_t^e - g_{1t},$$

con

$$\begin{aligned} f_t^{\bar{c}} &= \bar{c}_t \frac{e^{(\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta)(T-t)} - 1}{\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta} \div X_t^* \\ f_t^e &= e_t \left[ \frac{e^{(\mu_e - r - \sigma_e\theta)(T-t)} - 1}{\mu_e - r - \sigma_e\theta} - \Psi(S_t) \right] \div X_t^* \\ g_{1t} &= e_t \Psi'(S_t) \div X_t^* \end{aligned}$$

## A.2. Política de inversión del FCS

Para el caso del FCS se consideró el siguiente problema de control:

$$\max_{\pi \in \mathcal{A}^\pi(x)} V(Y_T)$$

en donde esta vez

$$\mathcal{A}^\pi(x) \triangleq \left\{ \pi : \begin{cases} \int_0^T \pi_t^2 dt < \infty \\ dY_t^\pi = [1 - \pi_t] Y_t^\pi r dt + Y_t^\pi \pi_t [dS_t/S_t + \delta dt] \\ \quad - (b_t + 1_D(t)(B - f(X_t^*))^+ - a_t) dt \\ Y_0 \geq 0; \mathbb{E}_t [Y_t^\pi + \int_t^T \xi_{t,s} a_s ds] \geq 0. \end{cases} \right\},$$

mientras que  $Y_t^\pi$  representa el valor del FCS, y la dinámica de  $a$  y  $b$  está dada por  $da_t/a_t = \mu_a dt + \sigma_a dW_t$  y  $db_t/b_t = \mu_b dt + \sigma_b dW_t$ , respectivamente.

Para garantizar la existencia de una solución podemos suponer que el valor presente de los aportes, más la riqueza inicial del FCS, es suficiente para financiar el valor presente de los flujos comprometidos, esto es,

$$\mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T \xi_t a_t dt \right] + Y_0 \geq \mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T \xi_t [b_t + 1_D(t)(B - f(X_t^*))^+] dt \right].$$

Para caracterizar los episodios de desempleo agregado podemos asociarlos con situaciones en donde el índice bursátil  $S \equiv \{S_t \geq 0; 0 \leq t \leq T\}$  cae por debajo de un nivel que denominaremos  $\bar{S}$ . Esto es decir

$$1_D(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_t \geq \bar{S} \\ 1 & \text{si } S_t < \bar{S} \end{cases}.$$

Siguiendo pasos similares a los del caso anterior, se tiene que el monto a acumular y la estrategia de inversión óptimos están respectivamente dados por las expresiones

$$Y_T^* = J(\bar{y} \xi_T e^{\rho T}) \quad \text{y} \quad \pi^{FCS} = \mathcal{D}_t(Y_t^*)/Y_t^* \sigma,$$

en donde  $J(y) \equiv v'^{-1}(y) = y^{-1/R}$ , mientras que  $\bar{y}$  es tal que

$$\mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T \xi_t a_t dt \right] + Y_0 = \mathbb{E}_0 \left[ \int_0^T \xi_t [b_t + 1_D(t)(B - f(X_t^*))^+] dt + \xi_{t,T} Y_T^* \right].$$

Luego, podemos determinar  $\pi^{FCS}$  a partir de la expresi3n para

$$Y_t^* = \mathbb{E}_t \left[ \int_t^T \xi_{t,s} [b_s + 1_D(s)(B - f(X_s^*))^+ - a_s] ds + \xi_{t,T} J(\bar{y} \xi_T e^{\rho T}) \right]. \quad (\text{A.3})$$

N3tese que los eventos  $\{S_s < \bar{S}\}$  y  $\{f(X_s^*) < B\}$  son equivalentes a:

$$\begin{aligned} \{x < (\ln(\bar{S}/S_t) - (\mu - \sigma^2/2)(s-t))/\sigma\sqrt{s-t} \equiv x_{1s}(S_t, s) \equiv x_{1s}\}, \quad y \\ \{x < (\ln((B-K)/A_t) - ((1/R)(r + \theta^2/2) + \mu_{\bar{c}} - \sigma_{\bar{c}}^2/2 - \rho/R - \mu_e + \sigma_e^2/2)(s-t)) \\ \div (\theta/R + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e)\sqrt{s-t} \equiv x_2(A_t, s) \equiv x_{2s}\}, \end{aligned}$$

con  $x \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,  $A_t = k \cdot (I(y \xi_t e^{\rho t}) \bar{c}_t / \alpha e_t) L_t$ , y

$$L_{1t} = \frac{e^{(\theta^2/2R^2 - r/R - \theta^2/2R)(T-s)} - 1}{\theta^2/2R^2 - r/R - \theta^2/2R} \frac{e^{(\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta)(T-s)} - 1}{\mu_{\bar{c}} - r - \sigma_{\bar{c}}\theta} \frac{\mu_e - r - \sigma_e\theta}{(e^{(\mu_e - r - \sigma_e\theta)(T-s)} - 1)}.$$

La funci3n  $f(\cdot)$  corresponde a:

$$f(X_s^*; K, k, \alpha) = K + k \frac{I(y \xi_t e^{\rho t}) \bar{c}_t}{\alpha e_t} L_{1t},$$

para  $(k, K, \alpha) \in \mathbb{R}_{++}^2 \times (0, 1)$  dados. La forma funcional espec3fica de  $f(\cdot)$  fue escogida para simplificar el 3lgebra involucrada.

Luego, para el segundo t3rmino en (A.3) se tiene

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_t \left[ \int_t^T \xi_{t,s} 1_{\{S_s < \bar{S}\}} (B - h(X_s^*))^+ ds \right] \\ &= \int_t^T \left( \int_{-\infty}^{x_{1s} \wedge x_{2s}} e^{-(r + \theta^2/2)(s-t) - \theta x \sqrt{s-t}} (B - h(X_s^*)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) ds \\ &= (B - K) \int_t^T e^{-(r + \theta^2/2 + \theta^2(s-t)/2)(s-t)} \left( \int_{-\infty}^{x_{1s} \wedge x_{2s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x + \theta\sqrt{s-t})^2} dx \right) ds \\ &\quad - M_t \int_t^T L_{1s} \left( \int_{-\infty}^{x_{1s} \wedge x_{2s}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x - (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e - \theta)\sqrt{s-t})^2} dx \right) ds \\ &= (B - K) \int_t^T L_{2s} \Phi(x_{1s} \wedge x_{2s} - \theta\sqrt{s-t}) ds \\ &\quad - M_t \int_t^T L_{1s} \Phi(x_{1s} \wedge x_{2s} + (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e - \theta)\sqrt{s-t}), \end{aligned}$$

en donde  $M_t \equiv k \cdot I \left( y^* \zeta_t e^{\rho t} \right) \bar{c}_t / \alpha e_t$ , y  $L_{2s} \equiv e^{-(r+\theta^2/2+\theta^2(s-t)/2)(s-t)}$ . Finalmente, tenemos

$$\begin{aligned} Y_t^* &= b_t \frac{e^{(\mu_b - r - \theta \sigma_b)(T-t)} - 1}{\mu_b - r - \theta \sigma_b} + (B - K) \int_t^T L_{2s} \Phi \left( x_{1s} \wedge x_{2s} - \theta \sqrt{s-t} \right) ds \\ &\quad - M_t \int_t^T L_{1s} \Phi \left( x_{1s} \wedge x_{2s} + (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e - \theta) \sqrt{s-t} \right) ds \\ &\quad - a_t \frac{e^{(\mu_a - r - \theta \sigma_a)(T-t)} - 1}{\mu_a - r - \theta \sigma_a} + \left( \bar{y} \zeta_t e^{\rho T} \right)^{-1/R} e^{(1-1/R)(\theta^2/2R^2 - r - \theta^2/R)(T-t)}. \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t(Y_t^*) &= \frac{\theta}{R} \left( \bar{y} \zeta_t e^{\rho T} \right)^{-1/R} e^{(1-1/R)(\theta^2/2R^2 - r - \theta^2/R)(T-t)} \\ &\quad + \sigma_b b_t \frac{e^{(\mu_b - r - \theta \sigma_b)(T-t)} - 1}{\mu_b - r - \theta \sigma_b} \\ &\quad - (\theta/R + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e) M_t \int_t^T L_{1s} \Phi \left( \underline{x}_{1s}(S_t, A_t) \right) ds \\ &\quad - \sigma_a a_t \frac{e^{(\mu_a - r - \theta \sigma_a)(T-t)} - 1}{\mu_a - r - \theta \sigma_a} \\ &\quad - \left( (B - K) \int_t^T L_{2s} \phi \left( \underline{x}_{2s}(S_t, A_t) \right) \right. \\ &\quad \times (\sigma 1_{x_{1s} < x_{2s}} + (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e) 1_{x_{2s} < x_{1s}}) ds \\ &\quad - M_t \int_t^T L_{1s} \phi \left( \underline{x}_{1s}(S_t, A_t) \right) \\ &\quad \left. \times (\sigma 1_{x_{1s} < x_{2s}} (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e) 1_{x_{2s} < x_{1s}}) ds \right), \end{aligned}$$

$\underline{x}_{1s}(S_t, A_t) = x_{1s} \wedge x_{2s} + (\theta/R + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e - \theta) \sqrt{s-t}$ ,  $\underline{x}_{2s}(S_t, A_t) = x_{1s} \wedge x_{2s} - \theta \sqrt{s-t}$ , de donde se obtiene la ecuación (2)

$$\pi_t^{FCS} = \frac{\mu - r}{R\sigma^2} f_t^Y + \frac{\sigma_b}{\sigma} f_t^b - \left( \frac{\mu - r}{R\sigma^2} + \frac{\sigma_{\bar{c}}}{\sigma} - \frac{\sigma_e}{\sigma} \right) f_t^M - \frac{\sigma_a}{\sigma} f_t^a - g_{2t}, \quad (2.5)$$

donde

$$\begin{aligned}
f_t^Y &= \left( \bar{y} \zeta_t e^{\rho T} \right)^{-1/\bar{R}} e^{(1-1/\bar{R})(\theta^2/2\bar{R}^2 - r - \theta^2/\bar{R})(T-t)} \div Y_t^*, \\
f_t^b &= b_t \frac{e^{(\mu_b - r - \theta\sigma_b)(T-t)} - 1}{\mu_b - r - \theta\sigma_b} \div Y_t^*, \\
f_t^M &= M_t \int_t^T L_{1s} \Phi(\underline{x}_{1s}(S_t, A_t)) \div Y_t^*, \\
f_t^a &= a_t \frac{e^{(\mu_a - r - \theta\sigma_a)(T-t)} - 1}{\mu_a - r - \theta\sigma_a} \div Y_t^*, \\
Y_t^* g_{2t} &= (B - K) \int_t^T L_{2s} \phi(\underline{x}_{2s}(S_t, A_t)) \left( \sigma 1_{\{x_{1s} < x_{2s}\}} + (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e) 1_{\{x_{2s} < x_{1s}\}} \right) ds \\
&\quad - M_t \int_t^T L_{1s} \phi(\underline{x}_{1s}(S_t, A_t)) \left( \sigma 1_{\{x_{1s} < x_{2s}\}} + (\theta/\gamma + \sigma_{\bar{c}} - \sigma_e) 1_{\{x_{2s} < x_{1s}\}} \right) ds, \\
Y_t^* &= \left( \bar{y} \zeta_t e^{\rho T} \right)^{-1/\bar{R}} e^{(1-1/\bar{R})(\theta^2/2\bar{R}^2 - r - \theta^2/\bar{R})(T-t)} + b_t \frac{e^{(\mu_b - r - \theta\sigma_b)(T-t)} - 1}{\mu_b - r - \theta\sigma_b} \\
&\quad + (B - K) \int_t^T L_{2s} \Phi(\underline{x}_{2s}(S_t, A_t)) ds - M_t \int_t^T L_{1s} \Phi(\underline{x}_{1s}(S_t, A_t)) ds \\
&\quad - a_t \frac{e^{(\mu_a - r - \theta\sigma_a)(T-t)} - 1}{\mu_a - r - \theta\sigma_a},
\end{aligned}$$

$M_t = k \cdot I(\bar{y} \zeta_t e^{\rho t}) \bar{c}_t / \alpha e_t$ ,  $\Phi(\cdot)$  y  $\phi(\cdot)$  corresponden a la función de densidad acumulada y la función de densidad de la distribución normal estándar, respectivamente.

## Referencias

- BERSTEIN, S., FAJNZYLBER, E., GANA, P. e I. POBLETE (2007): “Cinco Años de Funcionamiento del Seguro de Cesantía: Diagnóstico y Desafíos para su Perfeccionamiento,” Documento de Trabajo No. 23. Superintendencia de AFP.
- BLISS, R.R. y N. PANIGIRTZOGLU (2004): “Option-Implied Risk Aversion Estimates,” *Journal of Finance* **59**(1), 407-446.
- BRAVO, D., RUIZ-TAGLE, J. y J.L. CASTILLO (2006): “Estudio Actuarial 2005 de los Fondos de Cesantía,” Documento de Trabajo No. 22. Superintendencia de AFP.
- CASTAÑEDA, P. (2006): “Portfolio Choice and Benchmarking: The Case of the Unemployment Insurance Fund in Chile,” Documento de Trabajo No. 16. Superintendencia de AFP.
- DETEMPLE, J., GARCÍA, R. y M. RINDISBACHER (2005): “Intertemporal Asset Allocation: A Comparison of Methods,” *Journal of Banking & Finance* **29**, 2821-2848.

- FAJNZYLBER, E. e I. POBLETE (2008): "Un Modelo de Proyección para el Seguro de Cesantía," Documento de Trabajo (*por aparecer*). Superintendencia de AFP.
- GOLLIER, C. (2001): *The Economics of Risk and Time*. MIT Press: Cambridge, MA.
- KARATZAS, I. y S. SHREVE (1998): *Methods of Mathematical Finance*. Springer-Verlag, New York.
- MARKOWITZ, H. (1952): "Portfolio Selection," *Journal of Finance* **7**, 77-91
- MERTON, R.C. (1969): "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case," *Review of Economics and Statistics* **51**, 247-257.
- MERTON, R.C. (1971): "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-time Model," *Journal of Economic Theory* **3**, 373-413.
- NUALART, D. (2006): *The Malliavin Calculus and Related Topics* (2da. Ed.). Springer-Verlag: Berlín.
- WALKER, E. (2008): "Políticas de Inversión e Incentivos para los Fondos de Cesantía," Documento de Trabajo (*por aparecer*). Superintendencia de AFP.